Analisi Matematica A

Dato un numero naturale o nullo n, n assumerà i seguenti valori ordinati $\{0,1,2,3,...\}$.
Si definisce **n fattoriale** o **fattoriale di n**: $n! = n \cdot (n-1)!$ questa formula è corretta solo se n $\geq$ 1, poiché $0! = 1$
Questa definizione è detta per ricorrenza, perché per conoscere il valore del fattoriale assegnatomi devo prima conoscere il valore del fattoriale che lo precede.

Es.

$$1! = 1 \cdot 0! = 1 \cdot 1$$
$$2! = 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1$$
$$3! = 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 \cdot 1$$
$$4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$
$$5! = 5 \cdot 4! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

La formula generica sarà: $n! = n \cdot (n-i) \cdot (n-2) ... \cdot 2 \cdot 1$
Per avere una stima del valore del fattoriale saprò che: $2^n < n! < n^n$

Dato un insieme A formato da un numero n finito di elementi e preso un altro numero naturale k $\leq$ n, si definisce **disposizione** di k elementi tra gli n dati ogni sottoinsieme ordinato di A formato da k elementi, due disposizioni di k tra gli n elementi sono diverse se differiscono per gli elementi oppure per l'ordine con cui vengono presi gli elementi. Il numero delle disposizioni di k elementi tra gli n dati è dato dal seguente prodotto: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) ... \cdot (n-k+1)$
Un altro modo per ottenere il numero delle disposizioni è il seguente:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) ... \cdot (n-k+1) \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Essendo $(n-k+1) \cdot (n-k)! = (n-k+1)!$ $\quad n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) ... \cdot (n-k+1)!$

Se k = n, si parla di **permutazioni** ed il numero di permutazioni sarà n! poiché $\frac{n!}{0!}$

Dato un insieme A formato da n elementi, preso un numero naturale k $\leq$ n, si definisce **combinazione** di k elementi tra gli n dati ogni sottoinsieme di A formato da k elementi, due combinazioni sono diverse se sono formate da elementi diversi. Il numero di combinazioni di k fra gli n elementi dati sarà dato da: $\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) ... \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

Il risultato della formula è detto coefficiente **Binomiale** e si indica con: $\binom{n}{k}$ (leggi n su k)

Formula del binomio di **Neewton**: dati $a, b \in R$ e $n \in N$, cerco una formula per esprimere le seguenti quantità $(a+b)^n$ (potenza ennesima del binomio a + b)

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + ... + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 \cdot b^n$$

La formula compatta sarà:

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$ (leggi sommatoria per i valori di k da 0 a n)

Per i coefficienti si utilizza il triangolo di Tartaglia Pascal

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

Questa tabella mi serve per calcolare i coefficienti binomiali

La proprietà dei coefficienti binomiali è la seguente: i coefficienti binomiali equidistanti dagli estremi sono tra loro uguali. Quindi fissata una riga (n) e una posizione su di essa (k) si può scrivere la seguente proprietà:

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ tale proprietà è vera $\forall n$ e $\forall k \leq n$

La seconda proprietà dei coefficienti binomiali mi dice che la somma di due coefficienti binomiali su una riga è uguale al coefficiente binomiali che si trova sulla riga successiva sotto al coefficiente più spostato verso destra.

$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ tale proprietà è vera $\forall n$ e $\forall k \leq n - 1$

Esempio: Nella quinta riga 6 + 4 = 10, e il 10 si trova sotto al coefficiente binomiali più a destra

Un ultima proprietà del binomio di Neewton, detta anche disuguaglianza di Bernoulli, vale solo in un caso particolare, cioè con a = 1, quindi avremo che:

$(1+b)^n \geq 1 + nb \qquad \forall x \in N, b > -1$ b deve essere maggiore di –1 poiché se b < -1 $(1 + b)^n$ risulta minore di 1.

Questa disuguaglianza viene dimostrata per ricorrenza, poiché la sua dimostrazione è legata alla definizione di fattoriale, cioè:

1) Dimostro la proprietà per il primo valore di n consecutivo, cioè n + 1

$$\left.\begin{array}{r} n = 1 \Rightarrow (1+b)^n = 1 + b \\ n = 1 \Rightarrow 1 + nb = 1 + b \end{array}\right\} \text{La relazione è vera per uguaglianza}$$

2) Suppongo vera la proprietà al passo n - 1 e la dimostro vera al passo n, cioè da un numero (n – 1) al suo successivo (n):

Hp: $(1 + b)^{n-1} \geq 1 + (n - 1)\, b$

Th: $(1 + b)^n = 1 + nb$

Dall'ipotesi moltiplicando entrambi i membri per (1 + b), considerando b > -1, ottengo:

$$(1+b)\cdot(1+b)^{n-1} \geq (1+b)[1+(n-1)\cdot b]$$

$$(1+b)^n \geq 1 + (n-1)\cdot b + b + (n-1)b^2$$

$$(1+b)^n \geq 1 + n \cdot b + (n-1)b^2$$

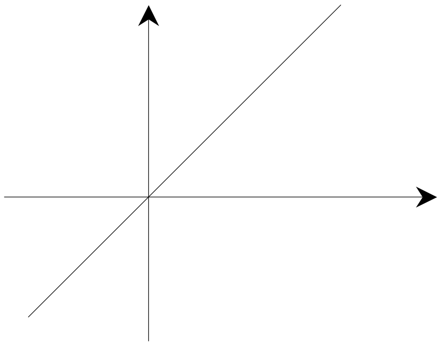
$(n - 1)b^2$ è sempre maggiore o uguale a 0, ne consegue che $(1 + b)^n \geq 1 + nb$

Dati due insiemi A e B, si dice funzione dell’insieme A all’insieme B ogni legge che ad ogni elemento di A fa corrispondere uno e un solo elemento di B: $f : \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$

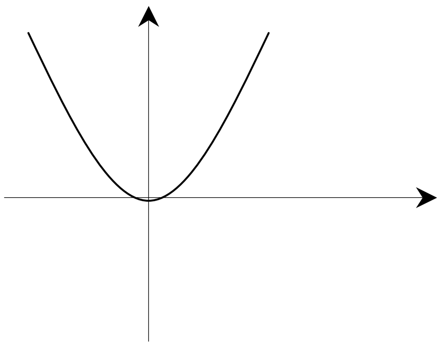
L’insieme A è anche detto dominio della funzione e si indica con *Df*. L’insieme degli elementi di B, che sono corrispondenti di almeno un elemento di A, fanno parte del condominio che si indica con *Cf* $\quad Cf = \{y \in B : \exists x \in A : f(x) = y\}$

Sa A e B sono sottoinsiemi propri di R $(A, B \subseteq R)$ la funzione si può rappresentare sul piano cartesiano. Esempi:

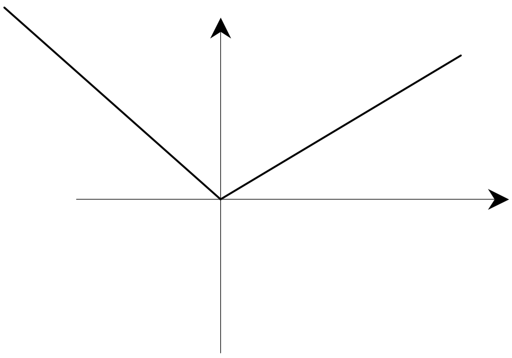
$f_1(x) = 2x$



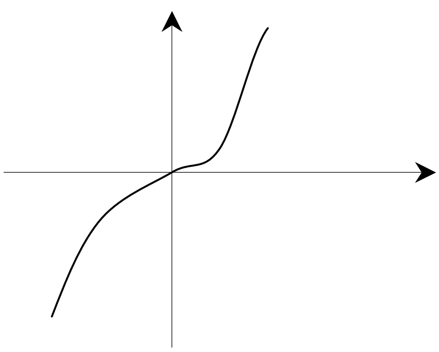
$f_2(x) = x^2$



$f_3(x) = |x|$



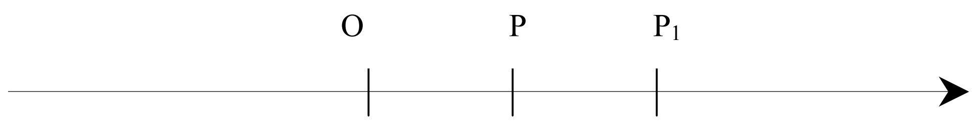
$f_4(x) = x^3$



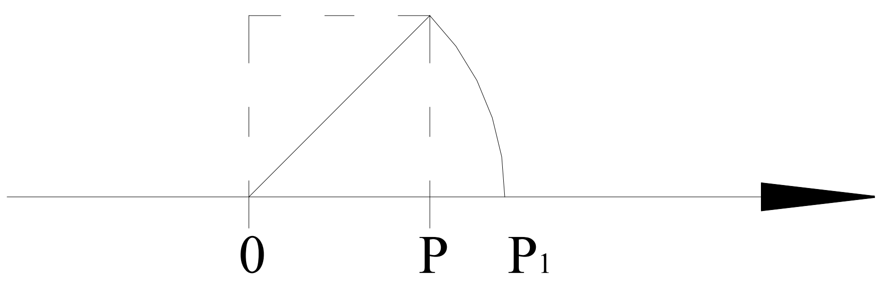
Una funzione si dice INIETTIVA se a ogni elemento distinto di A fa corrispondere elementi distinti di B, cioè: $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow y_1 \neq y_2$ quindi $f_1(x)$ e $f_4(x)$ sono iniettive.
Una funzione si dice SURIETTIVA se il condominio della funzione coincide con B $(Cf \equiv B)$, quindi $f_1(x)$ e $f_4(x)$ sono suriettive.
Se una funzione è sia iniettiva che suriettive, la funzione si dice biunivoca.

Data una funzione f: A → B mi chiedo se esiste una funzione che indicherò con $f^{-1}: Cf \to A$ tale che $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$
Questa funzione, detta funzione inversa, posso trovarla solo se la funzione è iniettiva, perché ad ogni elemento di partenza devo associare uno ed un solo elemento di arrivo.
Se $f: A \to B$ è biunivoca allora $\exists f^{-1}: B \to A$ che è biunivoca
N: insieme dei numeri naturali;
P: insieme dei numeri pari;
S: insieme dei numeri dispari;
Z: insieme dei numeri interi;
Q: insieme dei numeri razionali (positivi, negativi e frazioni);
R: insieme dei numeri reali;
∈: appartiene;
/ **-** **:** : tale che;
∅ - {}: insieme vuoto;
⊆: inclusione propria;
⊂: inclusione impropria;
∀: per ogni;
∃!: esiste un solo
∃: esiste;
⇔: se e solo se;
⇒: se;
→: ne consegue che;
∩: intersezione;
∪: unione;
∧: e;
∨: o;
x: cartesiano
P = {2k ; k ∈ N}
S = {2k + 1 ; k ∈ N}
Se A∩B = ∅ i due insiemi si dicono disgiunti;
P + S = N gli insiemi P, S si definiscono partizioni dell'insieme N poiché P∩S = ∅ e la loro somma ci da l'insieme N.

Dati 2 insiemi A e B, questi si dicono **equipotenti** o che hanno la stessa potenza se $\exists f: A \to B$ biunivoca (es. P è equipotenti a N).
Ogni insieme A che sia equipotenti a N si dice numerabile o che ha la potenza numerabile, si dimostra che Z è numerabile. A sua volta anche Q è numerabile.
Dati 2 numeri $p, q \in R$, tra essi c'è sempre almeno un numero azionale diverso da entrambi, $\left(\frac{p+q}{2}\right)$ da cui possiamo notare che tra p e q ci sono sempre infiniti numeri razionali.
Considerando una retta r sulla quale fisso un punto 0 (origine) e fisso un altro punto diverso P, che quindi mi da unità di misura e verso, ne consegue che a ogni numero razionale $\frac{m}{n} > 0$ corrisponde uno ed un solo punto P_1, con $P_1 : \overline{OP_1} = \frac{m}{n}$



Tale funzione è $f: Q^+ \to r$, ne consegue che questa funzione è iniettiva e non suriettive, quindi si avrà che $\exists P^1 \in r$ non sempre si avrà il corrispondente numero razionale (vedi esempio sotto con la costruzione de quadrato di lato unitario).



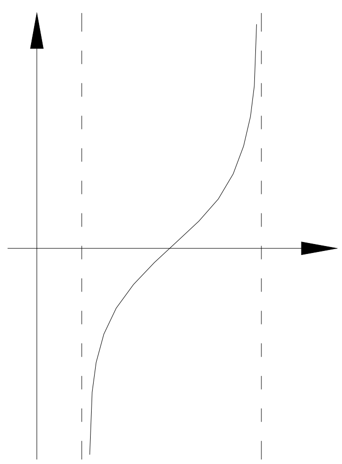
Quindi il segmento $\overline{OP^1}$ non ha rappresentazione nell'insieme Q, cioè è **incommensurabile** e ne consegue che: $\exists \frac{m}{n} : \frac{m^2}{n^2} = 2$ questo significa che m e n sono primi tra loro. Dimostriamo ora che questa definizione per assurdo, quindi dimostriamo che: $\exists \frac{m}{n} : m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2$ è pari, ne consegue che un quadrato è pari se il numero è pari, e cioè m = 2p, con $p \in N$, ne consegue che $m^2 = 4p^2$, quindi sostituendo a $m^2 = 2n^2$ si avrà: $4p^2 = 2n^2$ oppure $2p^2 = n^2$, questo implica che anche n è pari, ma m ed n devono essere primi tra loro, quindi la proprietà iniziale è assurda.
Tutti i punti che non hanno corrispondenza nei razionali sono i cosiddetti irrazionali.

Definizione assiomatica dell'insieme dei numeri reali (R)
Su R sono definite due operazioni, addizione e sottrazione, che godono della seguente proprietà:

1. **Commutativa**: $\left.\begin{cases} a+b=b+a \\ a\cdot b=b\cdot a \end{cases}\right\}\forall a,b\in R$
2. **Associativa**: $\left.\begin{cases} (a+b)+c=b+(a+c) \\ (a\cdot b)\cdot c=b\cdot(a\cdot c) \end{cases}\right\}\forall a,b,c\in R$
3. **Distributiva**: $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c \quad \forall a,b,c\in R$
4. **Esistenza dell'elemento neutro**: $\left.\begin{cases} a+0=a \\ a\cdot 1=a \end{cases}\right\}\forall a\in R$
5. **Esistenza dell'opposto o del reciproco**: $\begin{cases} a+(-a)=0 & \forall a\in R \\ a\cdot\frac{1}{a}=1 & \forall a\in R, a\neq 0 \end{cases}$
6. **Su R è stabilita una relazione d'ordine tale che valgono le seguenti proprietà**:
   - Transitiva: $a\le b, \quad b\le c\Rightarrow a\le c$;
   - Antisimmetrica: $a\le b, \quad b\le a\Rightarrow a=b$;
   - Ordinamento totale: $\forall a,b\in R$ si ha che $a\le b$ oppure $b\le a$;
   - Traslativa: $a\le b,\Rightarrow a+c\le b+c$;
   - $a\le b,\Rightarrow a\cdot c\le b\cdot c$;
7. **Assioma di completezza**: dati 2 insiemi A e B contenuti in R $(A,B\subseteq R)$ tali che $A\neq 0, B\neq 0$ e con $a\le b, \forall a\in A$ e $\forall b\in B$, allora $\exists x\in R: a\le x\le b \quad \forall a\in A$ e $\forall b\in B$ ne consegue che tra un numero e quello successivo c'è sempre un altro numero.

Quindi sappiamo che R è più che numerabile, cioè è un ∞ continuo, poiché è possibile metterlo in corrispondenza biunivoca con una retta. Se un insieme A è equipotenti a R si dice che ha la stessa <u>potenza del continuo</u>.

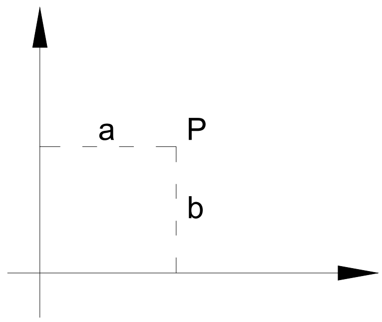
Dati $a,b\in R$ con $a<b$, si introducono i seguenti insiemi:
Intervalli: $[a,b]$ $\quad]a,b[$ $\quad [a,b[$ $\quad]a,b]$
Semirette: $[a,+\infty[$ $\quad]a,+\infty[$ $\quad]-\infty,a]$ $\quad]-\infty,a[$
Ogni intervallo $]a,b[$ è equipotenti a R, cioè $\exists f:]a,b[\rightarrow R$ che è una funzione biunivoca.



Data un'equazione algebrica razionale del tipo $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ con $a_0, a_1, ..., a_n \in R$ essa non ha sempre soluzioni in R, poiché il Δ potrebbe essere < 0, invece tale equazione sarà sempre possibile e avrà n soluzioni nell'insieme dei numeri complessi C. l'insieme R è sempre in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta, l'insieme C invece è sempre in corrispondenza biunivoca con i punti di un piano cartesiano, cioè l'insieme C è costituito dalla totalità delle coppie ordinate con $a, b \in R$ e in questo insieme valgono le seguenti regole di calcolo:

1. $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$;
2. $(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$;

Si verifica che per queste operazioni valgono le proprietà: commutativa, associativa, distributiva. Per l'addizione l'elemento neutro è (0,0) mentre per la moltiplicazione è (1,0). L'opposto del numero (a,b) è (-a,-b). Ad ogni numero complesso (a,b) corrisponde uno ed un solo punto P del piano sul quale si ha un sistema di riferimento cartesiano. $P \equiv (a, b)$



Come conseguenza della regola assegnata per l'addizione abbiamo la possibilità di scrivere la seguente identità: $(a, b) = (a, 0) + (0, b) \quad \forall a, b \in R$

Considero e studio ora i numeri del tipo (a,0), geometricamente ci troviamo sulla retta delle ordinate.

La somma e il prodotto di un numero con la seconda coordinata nulla è ancora un numero con la seconda coordinata nulla, allora posso identificare i numeri di tipo (a,0) con a. $(a, b) \equiv a$ quindi possiamo affermare che $R \subseteq C$, tale relazione non è da considerarsi in senso insiemistica, poiché R è un insieme di numeri e C è un insieme di coppie ordinate.

Considero ora i numeri del tipo (0,b), sempre per le regole dette prima si ha che: $(0, b) = (0, 1) \cdot (b, 0)$ poiché $(b, 0) \equiv b$ essa è verificata. Il fattore (0,1) è detto **unità immaginaria** e si indica con la lettera i. $(0, 1) = i \Rightarrow (0, b) = i \cdot b$ dunque si avrà:

$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + i \cdot b \quad \forall a, b \in R$

Il valore di **i** varia al variare della sua potenza:

$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = -i$

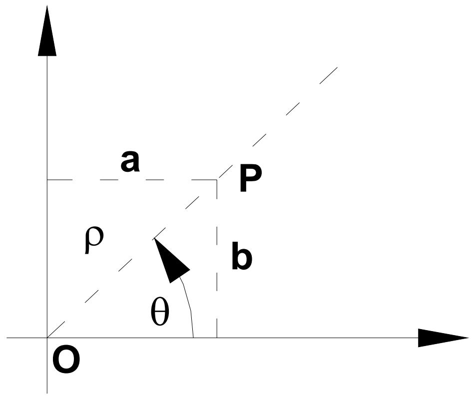
$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$

$i^5 = i$

Ne consegue che le potenze di i ogni 4 si ripetono ciclicamente.

Esempio: $(a + i \cdot b) \cdot (c + i \cdot d) = a \cdot c + i \cdot a \cdot d + i \cdot b \cdot c + \underbrace{i^2}_{-1} \cdot b \cdot d = \overbrace{(a \cdot c - b \cdot d)}^{a} + i\overbrace{(a \cdot b + b \cdot d)}^{b}$

Considero ora un numero Z che posso vedere come coppia ordinata o in forma algebrica. Ad esso corrisponde un punto P di coordinate (a,b). La posizione di P può essere trovata tramite altre coordinate, quali distanza OP o l'angolo che la retta OP forma con la retta r.



La distanza tra P e O è una distanza reale maggiore o uguale a 0 e viene chiamata modulo e si indica con ρ. Tra OP ed r non è unicamente determinato un angolo e si indica con θ. Se $0 \leq \theta \leq Z$ è detto **argomento principale**.

$P \equiv (a,b) \equiv (\rho,\theta)$ si avranno le seguenti formule di passaggio: $\begin{matrix} a = \rho \cdot \cos\theta \\ b = \rho \cdot \sin\theta \end{matrix}$

$$Z = a + i \cdot b = \rho \cdot \cos\theta + i \cdot \rho \cdot \sin\theta = \underbrace{\rho \cdot (\cos\theta + i \cdot \sin\theta)}_{\text{formula trigonometrica}}$$

$\rho = |Z|$, Z è complesso, e il suo modulo invece è reale (R_0^+).

Dato un numero complesso Z = (a,b), si dice suo **coniugato** $(a,-b) = a - i \cdot b = \overline{Z}$

Proprietà che lega un numero al suo coniugato:

$$Z + \overline{Z} = a + i \cdot b + a - i \cdot b = 2 \cdot a, \qquad a, b \in R$$

$$Z \cdot \overline{Z} = (a + i \cdot b) \cdot (a - i \cdot b) = a^2 - \underbrace{i^2}_{-1} \cdot b^2 = a^2 + b^2 \qquad a, b \in R$$

Ne consegue che la somma e il prodotto di un numero coniugato e di un numero complesso è un numero reale.

Dato un numero complesso Z, cerco il suo reciproco, Z^{-1}.

$$Z = a + i \cdot b \qquad \text{con} \qquad a^2 + b^2 \neq 0$$

$Z^{-1} = \dfrac{1}{a + i \cdot b} \Rightarrow$ moltiplico e divido per il coniugato del denominatore

$$Z^{-1} \cdot \frac{\overline{Z}}{\overline{Z}} = \frac{1}{a + i \cdot b} \cdot \frac{a - i \cdot b}{a - i \cdot b} = \frac{a - i \cdot b}{a^2 + b^2} = \underbrace{\frac{a}{a^2 + b^2}}_{a} + i \cdot \underbrace{\frac{-b}{a^2 + b^2}}_{b}$$

Dato il numero $Z = a + i \cdot b$ chiameremo:

a = R_e Z (parte reale di Z) [vedi esempio 2];

b = I_m Z (coefficiente della parte immaginaria di Z, cioè $b \in R$ [vedi esempio 2];

a) $Z + i \cdot \overline{Z}^2 + 2 \cdot i = 0$

$Z = a + i \cdot b$

$$a + i \cdot b + i \cdot (a - i \cdot b)^2 + 2 \cdot i = a + i \cdot b + i \cdot a^2 + \overbrace{i^3}^{i} \cdot b^2 - 2 \cdot a \cdot \overbrace{i^2}^{1} \cdot b + 2 \cdot i =$$

$$= \underbrace{(a + 2 \cdot a \cdot b)}_{a} + i \cdot \underbrace{(a^2 - b^2 + 2 + b)}_{b}$$

b) $\begin{cases} R_e Z^2 = -2 \\ I_m \dfrac{1}{Z} = -1 \end{cases}$

$$Z = a + i \cdot b$$

$$Z^2 = \overbrace{a^2 - b^2}^{R_e Z^2} + i \cdot \overbrace{2 \cdot a \cdot b}^{I_m Z^2}$$

$$\frac{1}{Z} = \overbrace{\frac{a}{a^2 + b^2}}^{R_e \frac{1}{Z}} + i \cdot \overbrace{\frac{-b}{a^2 + b^2}}^{I_m \frac{1}{Z}}$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -2 \\ \dfrac{-b}{a^2 + b^2} = -1 \end{cases} \qquad \ldots$$

Si deve però porre una condizione sulla prima equazione del sistema, e cioè: $a^2 = b^2 - 2 \Rightarrow b^2 - 2 \geq 0$

Prodotto e potenza in forma trigonometrica:
Dati 2 numeri C scritti in forma trigonometrica:
$Z_1 = \underbrace{\rho_1}_{\text{Modulo}} \cdot \left(\cos \underbrace{\theta_1}_{\text{Argomento}} + i \cdot \sin\theta_1 \right)$ $Z_2 = \underbrace{\rho_2}_{\text{Modulo}} \cdot \left(\cos \underbrace{\theta_2}_{\text{Argomento}} + i \cdot \sin\theta_2 \right)$ cerco modulo e argomento di $Z_1 \cdot Z_2$, ne consegue che:
$Z_1 \cdot Z_2 = \rho_1(\cos\theta_1 + i \cdot \sin\theta_1) \cdot \rho_2 \cdot (\cos\theta_2 \cdot \sin\theta_2)$ quindi utilizzando le formule di addizione della trigonometria avremo che: $Z_1 \cdot Z_2 = \underbrace{\rho_1 \cdot \rho_2}_{\text{Modulo}} \cdot \left(\cos\underbrace{(\theta_1 + \theta_2)}_{\text{Argomento}} + i \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \right)$
Quindi potremo scrivere che:
Modulo del prodotto = prodotto dei moduli;
Argomento del prodotto = somma degli argomenti;
Se $Z_1 \neq 0$, il modulo o l'argomento del suo reciproco saranno rispettivamente:
<u>Modulo</u>: $\frac{1}{\rho_1}$
<u>Argomento</u>: $-\theta_1$
Dati Z in forma trigonometrica e $n \in N$, vale la seguente uguaglianza:
$Z^n = \underbrace{\rho^n}_{\text{Modulo}} \cdot \left(\cos \underbrace{(n \cdot \theta)}_{\text{Argomento}} + i \cdot \sin(n \cdot \theta) \right)$ tale formula è detta **formula di De Moivre**
Si dimostra ora tale formula per induzione:
1) $n = 1 \Rightarrow Z^1 = \rho_1 \cdot (\text{con}\theta + i \cdot \sin\theta)$ questo è vero perché è il punto di partenza.
2) Hp: $Z^n = \rho^n \cdot (\text{con}(n \cdot \theta) + i \cdot \sin(n \cdot \theta))$
Th: $Z^{n+1} = \rho^{n+1} \cdot (\text{con}((n+1) \cdot \theta) + i \cdot \sin((n+1) \cdot \theta))$
Quindi avremo che: $Z^{n+1} \underbrace{=}_{\text{Utilizzando la defin. di pot.}} Z^n \cdot Z^1 = [\rho^n \cdot (\cos(n \cdot \theta) + i \cdot \sin(n \cdot \theta))] \cdot [\rho \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{son}\theta)] =$
$= (\rho^n \cdot \rho^1) \cdot [\cos(n \cdot \theta + \theta) + i \cdot \sin(n \cdot \theta + \theta)] = \rho^{n+1} \cdot [\cos((n+1) \cdot \theta) + i \cdot \sin((n+1) \cdot \theta)]$
<u>*Da qui la tesi, come volevasi dimostrare*</u>

Dati un numero α in forma trigonometrica e $n \in N$, cerco un numero $Z \in C : Z^n = \alpha$ suppongo però che $n \geq 2$, altrimenti banalizzerei il problema. Ogni soluzione del problema viene chiamata radice ennesima di α. Suppongo θ_0 argomento principale, cioè $2\pi \geq \theta_0 \geq 0$. L'incognita è Z, α e n sono i dati, trasformo ora Z in forma trigonometrica: $Z = \rho \cdot (\text{con}\theta + i \cdot \sin\theta)$, le incognite ora sono: ρ e θ. $Z^n = \alpha$ utilizzando la formula di De Moivre diventa:
$\rho^n \cdot (\text{con}(n \cdot \theta) + i \cdot \sin(n \cdot \theta)) = \rho_0 \cdot (\cos\theta_0 + i \cdot \sin\theta_0)$ L'uguaglianza quindi sarà:
- Uguaglianza dei moduli: $\rho^n = \rho_0$;
- Gli argomenti devono differire di multipli interi di 2π, $n \cdot \theta = \theta_0 + 2K\pi : K \in Z$;

Ossia avremo che:
$\rho = \sqrt[n]{\rho_0}$ poiché essendo ρ una distanza avrà solo una soluzione maggiore di 0;
$\theta = \frac{\theta_0 + 2K\pi}{n}$ $\forall K \in Z$, per ogni K = 0, 1, 2, …, n-1 si ha che:
$\theta \leq \frac{\theta_0 + 2K\pi}{n} < 2\pi \Rightarrow$ individuo numeri complessi distinti, quindi il problema ha almeno n soluzioni

Procedo ora alla sua dimostrazione:

Se $\theta_0 \geq 0$, $K \geq 0 \Rightarrow \theta_0 + 2K\pi \geq 0 \Rightarrow \dfrac{\theta_0 + 2K\pi}{n} \geq 0$

Se $\theta_0 \leq 2\pi$, $K \leq n - 1 \Rightarrow \theta_0 + 2K\pi < 2\pi + 2\pi \cdot (n - 1) = 2\pi \Rightarrow \dfrac{\theta_0 + 2K\pi}{n} = 2\pi$

Ne consegue che per ogni altro valore di K ottengo argomenti che differiscono per multipli interi di 2π da uno degli argomenti precedentemente scritti, ossia: $\dfrac{\theta_0 + 2K\pi}{n}$

Valori di K	Argomento
0	$\dfrac{\theta_0}{n}$
1	$\dfrac{\theta_0 + 2\pi}{n}$
…	…
…	…
n	$\dfrac{\theta_0 + 2n\pi}{n} = \dfrac{\theta_0}{n} + 2\pi$ Differisce da K = 0 di 2π

Quindi il problema ha esattamente n soluzioni.

Esercizi:

a) Trovare $Z \in C : Z^4 - 1 - i = 0 \Rightarrow Z^4 = 1 + i$ devo trovare le radici quarte (n = 4) del numero 1 + i. Scrivo 1 + i in forma trigonometrica:

$1)\rho_0 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$2)\theta_0 : \begin{matrix} \cos\theta_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta_0 \dfrac{1}{\sqrt{4}} \end{matrix} \Rightarrow \theta_0 = \dfrac{\pi}{4}$

$1)\rho = \sqrt[4]{2^{\frac{1}{2}}}$

$2)\theta = \dfrac{\frac{\pi}{4} + 2K\pi}{4} \Rightarrow K = 0,1,2$

b) Trovare $Z \in C : Z^2 = 1 + 3 \cdot i$

$Z = a + i \cdot b$ le incognite sono a, b

$$Z^2 = a^2 - b^2 + 2 \cdot i \cdot a \cdot b = 1 + 3 \cdot i \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ 2 \cdot a \cdot b = 3 \end{cases} \begin{cases} a^2 - \dfrac{9}{4a^2} = 1 \\ b = \dfrac{3}{2 \cdot a} \end{cases} \begin{cases} 4a^4 - 9 - 4a^2 = 0 \\ // \end{cases}$$

Da qui si procede con il cambio della variabile.

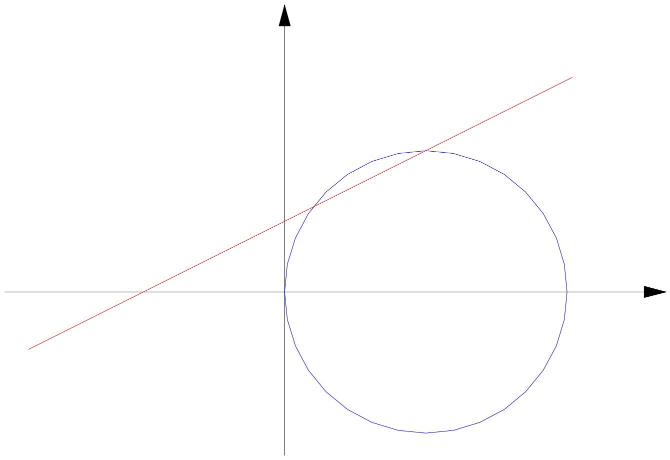
c) Trovare $Z \in C : |Z - 2| = 2$ e $2\mathrm{Im}Z - \mathrm{Re}Z = 2$

$Z = x + i \cdot y$

$$\begin{cases} |Z - 2| = 2 \\ 2\mathrm{Im}Z - \mathrm{Re}Z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x + i \cdot y| = 2 \\ 2 \cdot y - x = 2 \end{cases} \begin{cases} \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 2 \\ // \end{cases} \begin{cases} (2 \cdot y - 4)^2 + y^2 = 4 \\ x = 2 \cdot y - 2 \end{cases}$$

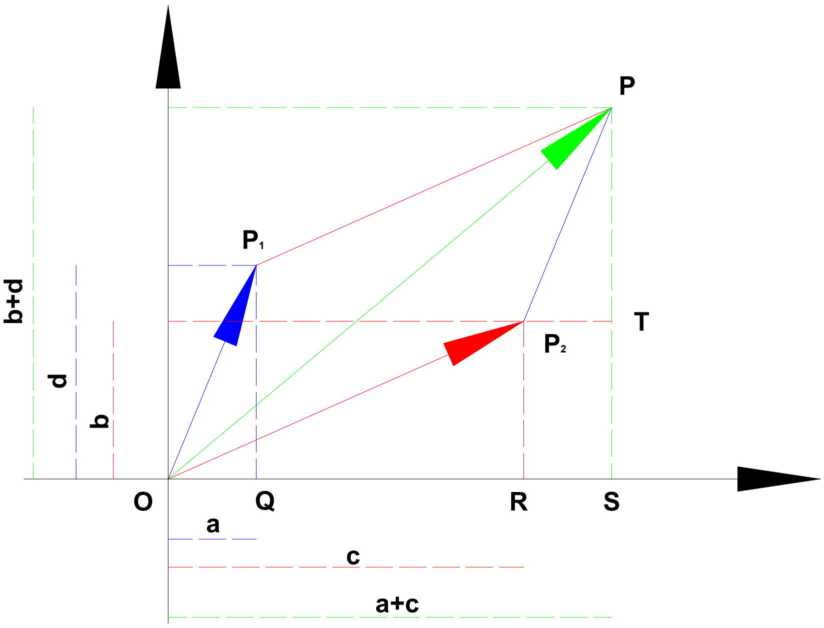
$$\begin{cases} 5 \cdot y^2 - 16 \cdot y + 12 = 0 \\ x = 2 \cdot y - 2 \end{cases} \quad y_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{5} = \begin{matrix} y_1 = 2 \\ y_2 = \dfrac{6}{5} \end{matrix} \begin{cases} y_1 = 2 \\ x_1 = 2 \end{cases} \begin{cases} y_2 = \dfrac{6}{5} \\ x_2 = \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

La risoluzione di questo sistema ci dà i punti di intersezione tra una rette e una circonferenza



Proprietà del modulo:

1) $|Z_1 \cdot Z_2| = |Z_1| \cdot |Z_2|$;
2) $\left|\dfrac{Z_1}{Z_2}\right| = \dfrac{|Z_1|}{|Z_2|}$ se $\quad Z_2 \neq 0$
3) $|Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$ Tale disuguaglianza è detta disuguaglianza triangolare, e si dimostra nel seguente modo:
   Suppongo di avere: $\underbrace{Z_1}_{P_1} = (a,d)$ e $\underbrace{Z_2}_{P_2} = (c,b)$ e $\underbrace{Z_1 + Z_2}_{P} = (a+c, b+d)$



Non conoscendo le misure del triangolo OPS, dobbiamo dedurre le misure dei suoi lati dal parallelismo dei segmenti di retta che ci sono serviti per la sua costruzione.
$|Z_1| = OP_1 = P_2P$ $\qquad |Z_2| = OP_2 = P_1P$ $\qquad$ considerando quindi il triangolo OPP_1, si avrà come deduzione logica che: $|Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$, per le proprietà elementari dei triangoli.
Nell'insieme dei numeri complessi non c'è la relazione d'ordine ($\leq$), non ha senso scrivere $Z_1 \leq Z_2$ essendo $Z_1 e Z_2 \in C$

Dato un insieme $A \in R$ ogni $M \in R$ si dice maggiorante per A se si verifica che $a \le M, \forall a \in A$

Es. $A = \left\{ x = \frac{1}{n}, \forall n \in N \right\}$ $M = 2$ → M è maggiorante

Se M è maggiorante per $A \Rightarrow \forall M_1 > M$ si ha $M_1 > A$. Se A ammette un maggiorante $\Rightarrow$ A si dice limitato superiormente. A limitato superiormente $\underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{equivale}} \exists M \in R : a \le M, \forall a \in A$

Se A non ha maggioranti, si dice non limitato superiormente, cioè:
A non limitato superiormente $\Leftrightarrow \exists M \in R \exists \bar{a} \in A : \bar{a} > M$
N, Z, Q, R non sono limitati superiormente, ma non è limitato superiormente anche $]0,+\infty[$.

A limitato inferiormente $\Leftrightarrow \exists m \in R : m < a, \forall a \in A$

A non limitato inferiormente $\Leftrightarrow \exists m \in R \exists \bar{a} \in A : \bar{a} < m$

N.B. A limitato sia superiormente che inferiormente $\Leftrightarrow \exists m, M \in R : m \le a \le M, \forall a \in A$

Si dice <u>massimo</u> il primo dei maggiorati, che è il più piccolo di essi e sta nell'insieme A, cioè:
M è maggiorante e $M \in A$
Si dice <u>minimo</u> il primo dei minoranti, che è il più grande di essi e sta nell'insieme A, cioè:
m è minorante e $m \in A$
Esempio:

$A = \left\{ x = \frac{1}{n}, \forall n \in N \right\}$ A è limitato $A \subseteq [0,1]$

1 è massimo per A, 0 è minorante, ma non è minimo poiché $0 \notin N$

Dato un insieme $A \subseteq R$ e un numero $L \in R$, L si dice estremo superiore per A
$L = \sup.A = \sup_{a \in A}.a$ se:

1) L è maggiorante per A;
2) L è il più piccolo dei maggioranti;

Scrivendo in modo equivalente la seconda condizione, avremo che: se prendo un numero strettamente minore di L, esso non è più maggiorante per A. $\forall \varepsilon > 0$ considero che $L - \varepsilon$ non è maggiorante per A, ossia $\exists \bar{a} \in A : \bar{a} > L - \varepsilon$ (ε: quantità positiva). In definitiva avremo che: $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{a} \in A : \bar{a} > L - \varepsilon$

Dato un insieme $A \subseteq R$ e un numero $l \in R$, l si dice estremo inferiore per A
$l = \inf.A = \inf_{a \in A}.a$ se:

3) l è minorante per A;
4) l è il più grande dei minoranti;

Scrivendo in modo equivalente la seconda condizione, avremo che: se prendo un numero strettamente maggiore di l, esso non è più minorante per A. $\forall \varepsilon > 0$ considero che $L + \varepsilon$ non è minorante per A, ossia $\exists \bar{a} \in A : \bar{a} < l + \varepsilon$ (ε: quantità positiva). In definitiva avremo che: $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{a} \in A : \bar{a} < l + \varepsilon$
Riassumendo:

1) $L = \sup A$ $a \le L, \forall a \in A$ e $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{a} \in A : \bar{a} > L - \varepsilon$
2) $l = \inf A$ $l \le a, \forall a \in A$ e $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{a} \in A : \bar{a} < l + \varepsilon$

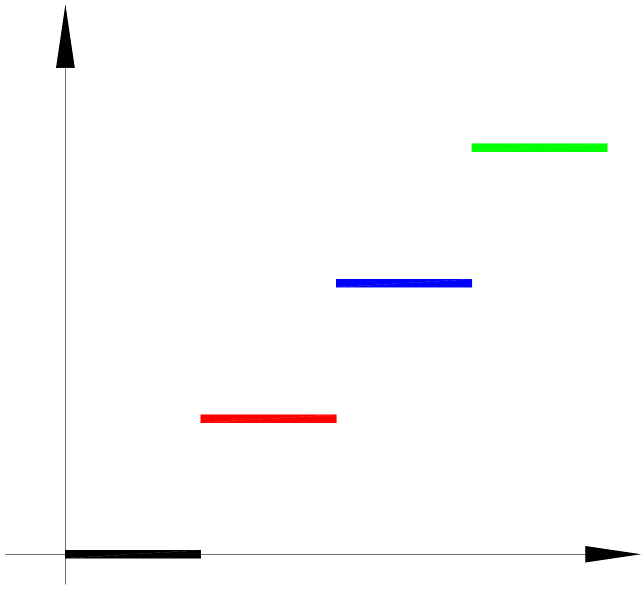
Dato l'insieme $A = \left\{ x = \frac{1}{n}, \forall n \in N \right\}$ e $\inf A = 0$ dimostro le proprietà precedentemente descritte:

1) $0 \le \frac{1}{n}, \forall n \in N$ tale proprietà è banalmente vera;
2) $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \in A : \frac{1}{\bar{n}} < 0 + \varepsilon$ l'incognita è $\bar{n}$ ed ε è il dato del problema.

Considero un generico $\varepsilon > 0$ e cerco $\bar{n} : \frac{1}{\bar{n}} < \varepsilon$.

$\frac{1}{\bar{n}} < \varepsilon$ equivale a $\bar{n} > \frac{1}{\varepsilon}$, poiché tutti i numeri sono positivi.

Per risolvere questo problema ho bisogno della funzione "parte intera di"
f: $R_0^+ \rightarrow R$ così definita, ad ogni numero $x \in R_0^+$ associo il numero naturale o nullo che è il più grande intero $\le x$, allora se $0 \le x < 1$ si ha $f(x) = 0$. Tale funzione si indica con il segno $[x]$. Il grafico di questa funzione quindi sarà:



$[x] \le x \le [x] + 1$ quindi in risoluzione al problema di prima avremo che:

$\bar{n} = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1, \in N \Rightarrow \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$ quindi come volevamo dimostrare il problema ha almeno una soluzione in questo caso ha infinite soluzioni.

Vale il seguente Teorema (di WEIEERSTRASS) [teorema valido anche se limitata inferiormente].
Se $A \subseteq R$ è tale che $A \ne 0$ e A è limitato superiormente, cioè ha almeno un maggiorante, allora $\exists L \in R : L = \sup A$ (esistenza dell'estremo superiore in R).
Il teorema non vale in Q, ad esempio se $A = \{ x \in Q^+ : x^2 < 2 \}$, tale insieme è limitato, non vuoto e l'estremo superiore di A è $\sqrt{2} \notin Q$.
Dato un insieme $A \ne 0$, abbiamo 2 situazioni:

1) A limitato superiormente, allora $\exists \sup A \in R$;
2) A non limitato superiormente, allora scriveremo simbolicamente $\sup A = +\infty$;

Definizione di limitatezza:
Se ho A limitato, allora $\exists m, M \in R : m \le a \le M, \forall a \in A$, ma equivalentemente si ha:
A limitato superio $\Leftrightarrow \exists K \in R^+ : |a| \le K, \forall a \in A$, per dimostrare questa funzione avremo che:

1. $|a| \le K$ utilizzando la proprietà del valore assoluto, equivale a: $-K \le a \le +K$, ne consegue che posso prendere m = -K e M = +K.
2. $K = \max\{|m|, |M|\}$

<u>Definizioni analoghe di funzioni</u> (lim. Inf., lim. Sup….)

Data una funzione f: Df → R
$M \in R$ è maggiorante per f se M è maggiorante per Cf (codominio), ossia $\underbrace{f(x)}_{\text{Codominio}} < M, \forall x \in Df$

Esempio: $f(x) = x^2 \quad x \in R \quad Cf = R^+$ f non limitata superiormente.
Dimostro che f non limitata superiormente, cioè: $\sup Cf = +\infty \quad \sup_{x \in R} f(x) = +\infty$ cioè equivale a: $\forall M \in R \exists \bar{x} \in R : f(x) > M$ nel nostro caso $f(\bar{x}) > M$ diventa $(\bar{x})^2 > M$. L'incognita è soprassegnata ed M è da considerarsi un dato del problema, quindi risolvo $(\bar{x})^2 > M$ rispetto a $\bar{x}$.

Se: $\bar{x}\begin{cases} M < 0 \Rightarrow \forall x \in R \\ M \ge 0 \Rightarrow \bar{x} < -\sqrt{M} \cup \bar{x} > -\sqrt{M} \end{cases}$ In conclusione possiamo fare 2 conclusioni:

- $\bar{x}$ è funzione di M, cioè dipende da M $\left(\bar{x} = \bar{x}(M)\right)$;
- Posso scrivere la definizione con $M \in R^+$, cioè: $M \in R = M \in R^+$

Data f: Df → R e dato un numero $L \in R$ si definisce estremo superiore

$$L = \sup_{x \in Df} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le L, \forall x \in Df \\ \forall \varepsilon > 0 \exists \bar{x} \in Df : f(\bar{x}) > L - \varepsilon \end{cases}$$

Successioni

Si definisce <u>successione</u> ogni funzione il cui dominio coincide con N, quindi sono leggi che ad ogni $n \in N$ associano un numero reale o complesso ($n \rightarrow a_n$). Le successioni si indicano con la seguente simbologia: $\{a_n\}_n$ oppure $(a_n)_n$

Esempi:

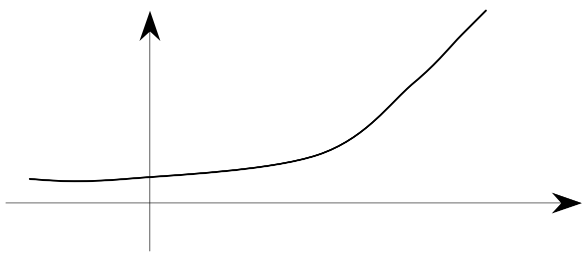
1. $a_n = \frac{1}{n}$ $\quad \inf_{n \in N} a_n = 0$
2. $a_n = n^2$ $\quad \sup_{n \in N} a_n = +\infty$
3. $a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 \text{ se } n \in P \\ -1 \text{ se } n \in D \end{cases}$ $\quad \inf_{n \in N} a_n = -1 \quad \sup_{n \in N} a_n = +1$
4. $a_n = (-1)^n \cdot n = \begin{cases} n \text{ se } n \in P \\ -n \text{ se } n \in D \end{cases}$ $\quad \inf_{n \in N} a_n = -\infty \quad \sup_{n \in N} a_n = +\infty$

<u>Definizioni di monotonia</u>

Data una funzione f: Df $\rightarrow$ R con $Df \subseteq R$, essa si definisce monotona se: $\forall x_1, x_2 \in Df$ con $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) \leq f(x_2)$ tale monotona è definita <u>non decrescente</u>.
Se invece, $\forall x_1, x_2 \in Df$ con $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) < f(x_2)$ la funzione è detta <u>crescente</u>.
Se vi è una funzione $\forall x_1, x_2 \in Df$ con $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) \geq f(x_2)$ la funzione è detta <u>non crescente</u>.
Se vi è una funzione $\forall x_1, x_2 \in Df$ con $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) > f(x_2)$ la funzione è detta <u>decrescente</u>.

Esempi:

1. $f(x) = e^x$ è una funzione monotona crescente;



2. $f(x) = [x]$ è una funzione monotona non decrescente;

Se una funzione è monotona crescente o decrescente allora la funzione è iniettiva, ne consegue che posso costruire la funzione inversa $(\exists f^{-1})$

Definizione di monotonia per le successioni:

Data una successione $\{a_n\}_n$ essa si dice monotona non decrescente se $\forall n_1, n_2 \in N$ con $n_1 < n_2$ si ha $a_{n1} \leq a_{n2}$. Solo in N questo equivale a: $\forall n \in N$ si ha $a_n \leq a_{n+1}$
Da questa si ricavano le altre definizioni riguardanti la monotonia delle successioni.
Se ho una successione che sia monotona crescente o decrescente si ha $a_1 = \min_{n \in N} a_n$

Esercizi:

$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \forall n \in N$ $\quad a_n > 0$ poiché il primo termine è maggiore del secondo, ne consegue che vi è limitatezza inferiore e 0 è un minorante.

Per comodità trasformo la mia successione:

$$a_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$\left.\begin{array}{l} \sqrt{n+1} \text{ è crescente} \\ \sqrt{n} \text{ è decrescente} \end{array}\right\} \Rightarrow$ la somma è crescente perché lo sono separatamente i due addendi.

Concludendo $\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ è una successione decrescente. Alla luce di questo risultato avremo che: $a_1 = \max\limits_{n \in N} a_n \Rightarrow \sup\limits_{n \in N} a_n$. Ammettendo massimo la funzione è limitata, in particolare $0 < a_n < a_1$, $\forall n \in N$.

Ora verifico se lo 0 è limite:

$0 = \inf\limits_{n \in N} a_n \Leftrightarrow \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{cases} a_n \geq a, \forall n \\ \forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} : a_{\bar{n}} < \varepsilon \end{cases}$ Verifico la seconda proprietà: preso $\varepsilon > 0$, cerco $\bar{n}$:

$0 < \sqrt{\bar{n}+1} - \sqrt{\bar{n}} < \varepsilon$ devo porre due condizioni, cioè che $\sqrt{\bar{n}+1} - \sqrt{\bar{n}}$ sia una quantità positiva e che $\sqrt{\bar{n}+1} - \sqrt{\bar{n}}$ ed ε abbiano lo stesso segno.

$\left(\sqrt{\bar{n}+1} - \sqrt{\bar{n}}\right)^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow$ avremo: $2 \cdot \bar{n} + 1 - \varepsilon^2 < 2 \cdot \sqrt{\bar{n}^2 + \bar{n}}$ considero $\varepsilon < 1$ ed elevo nuovamente al quadrato: $4 \cdot \bar{n}^2 + 1 + \varepsilon^4 + 4 \cdot \bar{n} - 4 \cdot \bar{n} \cdot \varepsilon^2 - 2 \cdot \varepsilon^2 < 4 \cdot \bar{n}^2 + 4 \cdot \bar{n}$

$4 \cdot \bar{n} \cdot \varepsilon^2 > \left(1 - \varepsilon^2\right)^2 \Rightarrow \bar{n} > \frac{\left(1-\varepsilon^2\right)^2}{4 \cdot \varepsilon^2}$ posso prendere ad esempio: $\bar{n} = \left[\frac{\left(1-\varepsilon^2\right)^2}{4 \cdot \varepsilon^2}\right] + 1$

Concludo quindi che $0 = \inf\limits_{n \in N} a_n$

$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ Il dominio della seguente funzione sarà: $Df = \left]-\infty, -1\right[\cup \left]0, +\infty\right[$, quindi questa funzione sarà studiata in due momenti:

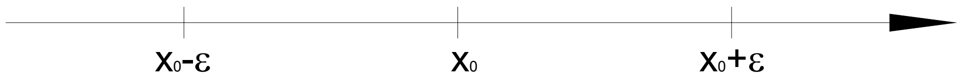
a) $x > 0$, $\quad \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{x} > 1 \Rightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \ln 1 = 0$, posso concludere che in questo tratto la funzione è inferiormente limitata quindi 0 è minorante per f(x) per $x \in \left]0, +\infty\right[$. Sempre in questo tratto, con $x \in \left]0, +\infty\right[$ la f(x) non è superiormente limitata;

b) $x < -1$, $\quad \frac{1}{x} < 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \ln 1 = 0$, posso concludere che in questo tratto la funzione è superiormente limitata per $x \in \left]-\infty, -1\right[$. Sempre in questo tratto, con $x \in \left]-\infty, -1\right[$ la f(x) non è limitata inferiormente;

Quindi totalmente la funzione non è limitata, ne superiormente ne inferiormente.

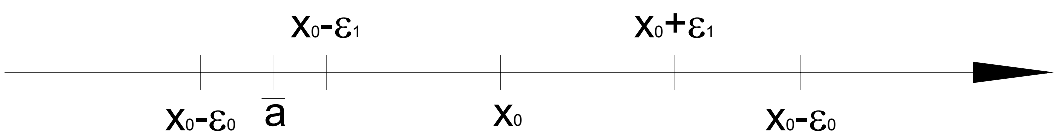
Elementi di topologia in R

Dato $x_0 \in R$, considero ε > 0, chiamo **intervallo centrato** in x_o e di raggio ε, l'insieme $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, quindi genericamente sarà:



Dato $A \subseteq R$, un punto $x_0 \in R$ si dice punto di **accumulazione** per l'insieme A se in ogni intervallo centrato in x_o c'è almeno un elemento o punti di $A \neq x_0$, cioè:
$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{a} \in A : \bar{a} \neq x_0$ e $\bar{a} \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ o anche $\forall \varepsilon > 0$ si ha la seguente proprietà:
$A \cap]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[- \{x_0\} \neq \emptyset$

Dato un insieme suppongo che $\exists x_0 \in R$ di accumulazione per A, preso $\varepsilon_o > 0$, voglio sapere quanti elementi di $A \neq x_0$ stanno $]x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0[$. La risposta è: almeno uno, ma non può essere solo uno, poiché se considero $\varepsilon_1 > 0$: $\bar{a} \notin]x_0 - \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_1[$ anche in questo intervallo vi sarà un elemento di $A \neq x_0$ (vedi grafico sotto);

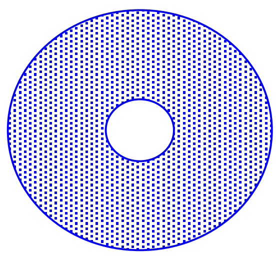


Quindi abbiamo dimostrato un teorema, cioè se A ha un punto di accumulazione, allora A ha infiniti elementi. Tale condizione è necessaria (CN) perché un insieme A abbia elementi di accumulazione, però questa condizione non è sufficiente (CS) perché io abbia punti di accumulazione.

Esercizi:

$2 < |z + 1 - 3 \cdot i| < 3$ essendo $z = x + i \cdot y$, quindi avremo che:

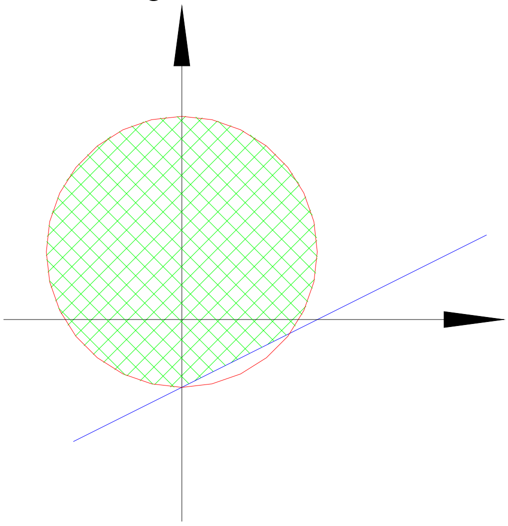
$z + 1 - 3 \cdot i = x + i \cdot y + 1 - 3 \cdot i = i \cdot (y - 3) + 1 + x$, quindi $|z + 1 - 3 \cdot i| = \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2}$ ne consegue che la disequazione equivalente sarà: $2 < |z + 1 - 3 \cdot i| < 3 \Leftrightarrow 4 < (x+1)^2 + (y-3)^2 < 9$. I punti di questa disequazione rappresenteranno i punti di una corona circolare.



$$\begin{cases} \operatorname{Im} Z + 1 \geq \dfrac{\operatorname{Re} Z}{2} \\ |Z-1|^2 \leq 4 \end{cases} \qquad z = x + i \cdot y \qquad z - i = x + i \cdot (y - 1)$$

$$|z - i|^2 = x^2 + (y - 1)^2 \qquad \begin{cases} y + 1 \geq \dfrac{x}{2} \\ x^2 + (y-1)^2 \leq 4 \end{cases}$$

Per la risoluzione di questo sistema immagino che al posto delle disuguaglianze ci siano delle uguaglianze e i valori comuni li trovo sul grafico.



Le soluzioni del sistema sono i punti contenuti nella circonferenza al di sopra della retta.

Proprietà sul teorema di esistenza di punti di accumulazione (Teorema di **Bolzano – Weierstrass**).

Se $A \subseteq R$ ha infiniti elementi ed è limitato, allora $\exists x_0 \in R$ di accumulazione per A.
Dato $A \subseteq R$ con infiniti elementi (CN perché A abbia punti di accumulazione), ci sono 2 possibili casi:

1) A limitato ($\Rightarrow \exists x_0 \in R$ di accumulazione per A);
2) A non limitato $\Rightarrow ?$

[Reale ampliato = $\widetilde{R} = R \cup \{+\infty, -\infty\}$ in R $\pm\infty$ sono dei simboli, mentre in $\widetilde{R}$ sono un insieme di valori].

Se $x_0 \in R$ ho considerato $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ con $\varepsilon > 0$, se prendo $+\infty$ agli estremi, si sostituiscono le semirette $]M, +\infty[$ con $M \in R^+$, se invece prendo $-\infty$ agli estremi, si sostituiscono le semirette $]-\infty, M[$ con $M \in R^+$.
Dato $A \subseteq R$, $+\infty$ è di accumulazione per A se $\forall M > 0$ (oppure $\forall M \in R^+$) $\exists \overline{a} \in A : \overline{a} \in]M, +\infty[$ qui non poniamo $\overline{a} \neq +\infty$ poiché è una cosa ovvia.
Ossia: $\forall M > 0 \exists \overline{a} \in A : \overline{a} > M$, ciò equivale a insieme non limitato superiormente, quindi possiamo concludere che:

- A non limitato superiormente se e solo se $+\infty$ è di accumulazione per A;
- A non limitato inferiormente se e solo se $-\infty$ è di accumulazione per A;

L'insieme dei numeri naturali N non è limitato superiormente, ne consegue che ha $+\infty$ come elemento di accumulo ed è l'unico, cioè non ha altri elementi di accumulazione.

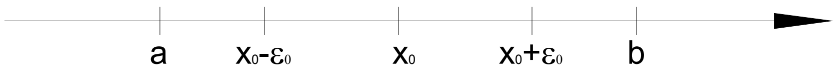
TOPOLOGIA

Punto interno: Dato $A \subseteq R$, $x_0 \in A$ si dice interno se $\exists \varepsilon_0 > 0 :]x - \varepsilon_0, x + \varepsilon_0[\subseteq A$. Se A è numerabile allora non ha punti interni.

Dato $A \subseteq R$, indico con $\overset{\circ}{A}$ tutti i punti interni ad A.

Esempio: $A \begin{Bmatrix}]a,b[\\ [a,b[\\ ]a,b] \\ [a,b] \end{Bmatrix}$ hanno lo stesso $\overset{\circ}{A} =]a,b[$

Dimostrazione:
$x_0 \in]a,b[$ è interno a $]a,b[$ $\qquad x_0 \in]a,b[\Leftrightarrow a < x_0 < b$
x_0 è interno $\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0 :]x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0[\subseteq]a,b[$



Ossia $a < x_0 + \varepsilon_0$ e $b > x_0 + \varepsilon_0$

$$\begin{cases} a < x_0 - \varepsilon_0 \\ x_0 + \varepsilon_0 < b \\ \varepsilon_0 > 0 \end{cases} \begin{cases} \varepsilon_0 < x_0 - a & \text{numero positivo} \\ \varepsilon_0 < b - x_0 & \text{numero positivo} \\ 0 < \varepsilon_0 < & \text{minore tra (xo - a, b - xo)} \Rightarrow \text{ha infinite soluzioni} \end{cases}$$

Ad esempio $\varepsilon_0 = \dfrac{\min(x_0 - a, b - x_0)}{2}$

Definizione di insieme aperto:

Se $A \equiv \overset{\circ}{A}$, allora A si dice aperto, e si indica con le parentesi quadre aperte $]a, b[$

A si dice chiuso se il suo complementare rispetto a R è aperto, ad esempio $[a, b]$ è chiuso.

Infine ci sono insiemi che non sono ne aperti ne chiusi, cioè: $[a, b[$ e $]a, b]$

Dato $A \subseteq R$, $x_0 \in R$ si dice di frontiera se $\forall \varepsilon > 0$ si ha che: $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap \underbrace{C}_{Complementare} A \neq \emptyset$ e $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap A \neq \emptyset$ ad esempio i punti a e b sono punti frontiera per $]a, b]$

Limite per funzioni (e successioni)

Data f: A → R ed essendo A = Df.

Preso x_o, voglio dare significato alla situazione seguente: quando x si avvicina a x_o, ovviamente rimanendo in A e non raggiungendo x_o, si ha che f(x) si avvicina ad un elemento l che chiamo limite di f(x) con x tendente a x_o [$\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x)$]

CN (condizione necessaria) per poter parlare di $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0}$ è che x_o sia di accumulazione per A, quindi per Df. Quindi avremo che: $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l$

$\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow$ comunque si prenda un intorno I_1 del valore l, $\exists$un intorno I_2 di x_0 : $\forall x \in I_2 \cap A - \{x_0\}$si ha che $f(x) \in I_1$

Da questa definizione possiamo avere vari casi:

<u>1° Caso</u>: $x_0 \in R$, $l \in R$

$\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap A - \{x_0\}$ si ha che $f(x) \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$

Ora scrivo $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ in modo equivalente

$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Leftrightarrow -\delta < x - x_0 < +\delta \Leftrightarrow |x - x_0| < +\delta$

$f(x) \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\Leftrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l$ con $x_0, l \in R$ e con x_o punto di accumulazione per A = Df

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x$ con $0 < |x - x_0| < \delta$ e $x \in A$ si ha $|f(x) - l| < \varepsilon$

$0 < |x - x_0| \Leftrightarrow x \neq x_0$

<u>2° Caso</u>: $x_0 = +\infty$, $l \in R$ con Df non limitato superiormente.

$\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M(\varepsilon) > 0 : \forall x$ con $x > M$ e $x \in Df$ si ha $|f(x) - l| < \varepsilon$

in tutti i casi in cui $x_o = +\infty$, essi contengono la successione, poiché il dominio delle successioni è N e $+\infty$ è il suo unico punto di accumulazione.

Data una successione $(a_n)_n$, abbiamo i seguenti casi:

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} a_n = \begin{cases} l \in R & \text{Successione Convergente} \\ \pm\infty & \text{Successione Divergente} \\ \nexists & \text{Successione Oscillante} \end{cases}$$

Proviamo ora a dedurre la definizione $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} a_n = l$ dalla definizione di limite:

$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_n = l \in R \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists M = M(\varepsilon) > 0 : \forall n$ con $n > M$ e $n \in N$ si ha $|a_n - l| < \varepsilon$

$n \in N$ si può togliere, poiché essendo una successione questo è ovvio, quindi equivalentemente si ha che: $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_n = l \in R \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\overline{n}(\varepsilon) : \forall n > \overline{n}$ si ha $|a_n - l| < \varepsilon$

$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists\overline{n}(M) : \forall n > \overline{n}$ si ha $a_n > M$

$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists\overline{n}(M) : \forall n > \overline{n}$ si ha $a_n < M$

Esempi di limiti per le successioni:

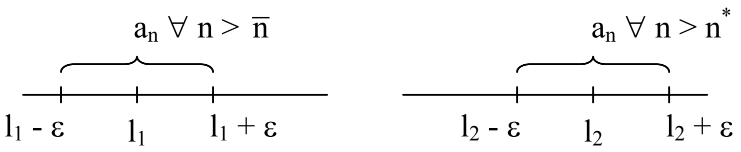
1. $a_n = 1, \forall n$ $\quad \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_n = 1$ $\quad$ essendo $|a_n - 1| = 0, \forall n$ avremo $|a_n - 1| < \varepsilon$ con $\varepsilon > 0, \forall n$
2. $a_n = n, \forall n$ $\quad \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} n = +\infty$
3. $a_n = (-1)^n$ $\quad \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_n$ La funzione è oscillante essa non può neanche avere limite l = 1 poiché la definizione di limite n → +∞ deve essere vera $\forall n > \overline{n}$

<u>Teorema dell'unicità del limite:</u>

Se $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ allora esso è unico

Dimostriamo per assurdo quanto appena affermato, supponiamo cioè che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} l_1 \\ l_2 \end{cases}$ con $l_1 < l_2$

Hp:



L'assurdo si verifica quando sovrappongo i disegni, cioè quando prendo infiniti valori di $\varepsilon_0 > 0$ si verifica che: $l_1 + \varepsilon_0 < l_2 - \varepsilon_0$. L'assurdo si verifica $\forall\ n > \max(\overline{n}, n^*)$

<u>Teorema di Limitatezza:</u>

Se $\{a_n\}_n$ è convergente allora è limitata (non vale il viceversa). [Per verificare una proposizione falsa è sufficiente fornire un esempio].

Esempio di successione limitata ma non convergente: $a_n = (-1)^n$

<u>Teorema del Valore Assoluto:</u>

Se $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbf{R}$ allora $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = |l|$, cioè il limite del valore assoluto è uguale al valore assoluto del limite, e non viceversa.

Esempio: $\quad \exists \lim\limits_{x\to+\infty} |a_n| \quad$ ma $\quad \nexists \lim\limits_{x\to+\infty} a_n$

Esercizio:

Scrivere con la definizione la seguente uguaglianza: $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = |l|$

$\lim\limits_{n\to+\infty} an = l \in R \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\overline{n}(\varepsilon) : \forall n > \overline{n}$ si ha $|a_n - l| < \varepsilon$. Essendo $\| x |\ | y \| \le | x\ \ y | \forall x, y \in R$ posso scrivere $||a_n| - |l|| \le |a_n - l|$, ma dalla definizione di limite $|a_n - l| < \varepsilon$ quindi $||a_n| - |l|| \le |a_n - l| < \varepsilon$ di conseguenza

$||a_n| - |l|| < \varepsilon$ allora la definizione di limite risulta ancora vera anche in questa forma:

$\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = |l|$ con $l \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \overline{n}(\varepsilon) : \forall\ n > \overline{n}$ si ha $||a_n| - |l|| < \varepsilon$

Teorema della permanenza del segno:
Se $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbf{R} - \{0\}$ allora $\exists\, n^* : a_n \cdot l > 0, \forall\, n > n^*$
Dimostrazione:
Caso $l > 0$
Devo dimostrare che $\exists\, n^* : a_n > 0\ \forall\, n > n^*$
$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \overline{n}(\varepsilon) : \forall\, n > \overline{n}$ si ha $|a_n - l| < \varepsilon$ o anche $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$
Dovendo dire se $a_n > 0$, considero $\varepsilon_0 > 0 : l - \varepsilon_0 > 0$, ad esempio: $\underline{\boldsymbol{\varepsilon_0 = 3}}$ allora ottengo
$a_n > l - 3 > 0, \forall\, n > \overline{n}(3)$ ossia $a_n > 0, \forall\, n > n^*$ con $n^* = \overline{n}(3)$

Invece di scrivere $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$ si può scrivere $\lim_n a_n = l$; $\lim a_n = l$; an $\xrightarrow{n\to+\infty} l$
$n \longrightarrow +\infty$ si sottintende poiché è l'unica soluzione possibile.

Vale il seguente teorema:
$\lim a_n = l \Rightarrow \lim |a_n| = |l|$ **ma non** $\lim |a_n| = |l| \Rightarrow \lim a_n = l$ tranne nel caso $l = 0$
$\lim |a_n| = 0 \Rightarrow \lim a_n = 0$ Poiché le due definizioni di limite sono identiche.

Teoremi di confronto:
Date $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ se $\exists\, n^* : a_n \leq b_n, \forall\, n > n^*$ allora si ha che valgono le seguenti proprietà:
1. $\exists \lim a_n = +\infty \Rightarrow \exists \lim b_n = +\infty$;
2. $\exists \lim b_n = -\infty \Rightarrow \exists \lim a_n = -\infty$;

Teorema dei 2 carabinieri:
Date $\{a_n\}_n$; $\{b_n\}_n$; $\{c_n\}_n$ tali che $\exists\, n^* : a_n \leq b_n \leq c_n, \forall\, n > n^*$ inoltre sappiamo che:
$\exists \lim a_n = \lim c_n = l \in \mathbf{R}$ allora si conclude che $\exists \lim b_n = l$
Dimostrazione:
Hp:
- ♠ $a_n \leq b_n \leq c_n, \forall\, n > n^*$
- ♠ $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \overline{n}(\varepsilon) : \forall\, n > \overline{n}(\varepsilon)$ si ha $|a_n - l| < \varepsilon$ cioè $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$
- ♠ $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n^I(\varepsilon) : \forall\, n > n^I(\varepsilon)$ si ha $l - \varepsilon < c_n < l + \varepsilon$

Th: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n^{II}(\varepsilon) : \forall\, n > n^{II}(\varepsilon)$ si ha $l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon$

$$\underbrace{l - \varepsilon < a_n}_{\text{Dalla 2° Hp valida } \forall\, n > \overline{n}(\varepsilon)} \overbrace{\leq b_n \leq}^{\text{Dalla 1° Hp valida } \forall\, n > n^*} \underbrace{c_n < l + \varepsilon}_{\text{Dalla 3° Hp valida } \forall\, n > n^I(\varepsilon)}$$

Da cui $l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon$ vera $\forall\, n > \max(\overline{n}; n^*, n^I)$
Essendo:
- $l - \varepsilon < a_n$ vera $\forall\, n > \overline{n}(\varepsilon)$;
- $a_n \leq b_n \leq c_n$, vera $\forall\, n > n^*$;
- $c_n < l + \varepsilon$ vera $\forall\, n > n^I(\varepsilon)$;

Quindi $n^{II}(\varepsilon) = \max(\overline{n}; n^*, n^I)$

Teorema:

Date $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ tali che $\exists\, n^* : a_n \leq b_n \ \forall\, n > n^*$ ed $\exists \lim a_n = l_1 \in \mathbf{R}$, $\exists \lim b_n = l_2 \in \mathbf{R}$,
la tesi è allora $l_1 \leq l_2$

Se la prima ipotesi è $a_n < b_n \ \forall\, n > n^*$ si ha ancora $l_1 \leq l_2$

Esempio: $a_n = 0, \forall\, n \rightarrow l_1 = 0$

$b_n = \frac{1}{n}, \forall\, n \rightarrow l_2 = 0$

Regole di calcolo dei limiti

Teorema:

Date $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$, se $\exists \lim a_n = l_1 \in \mathbf{R}$ ed $\exists \lim b_n = l_2 \in \mathbf{R}$ allora avremo che:
$\exists \lim (a_n + b_n) = l_1 + l_2$ ed $\exists \lim (a_n \cdot b_n) = l_1 \cdot l_2$

Cioè il limite di una somma (o di un prodotto) è uguale alla somma (o al prodotto) dei limiti.
Attenzione però che può esistere il limite della somma (o del prodotto), e non esistere il limite degli addendi (o dei fattori);

Esempio:

$a_n = (-1)^n \qquad b_n = -a_n \qquad a_n + b_n = 0$

Può: $\exists \lim a_n$ ed $\exists \lim (a_n + b_n)$ e nello stesso tempo $\nexists \lim b_n$

Teorema del reciproco:

Date $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$, se $\exists \lim a_n = l \in \tilde{\mathbf{R}}$ allora

$$\exists \lim \frac{1}{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{l} & \text{se } l \in \mathbf{R} - \{0\} \\ 0 & \text{se } l = \pm\infty \\ +\infty & \text{se } l = 0 \text{ e } \exists\, n^* : a_n > 0 \ \forall\, n > n^* \\ -\infty & \text{se } l = 0 \text{ e } \exists\, n^* : a_n < 0 \ \forall\, n > n^* \end{cases}$$

Esempi:

1. $a_n = n \quad \lim a_n = +\infty \qquad \Rightarrow \lim \frac{1}{a_n} = 0$
2. $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \quad \exists \lim a_n = 0$ perché $|a_n| = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$

   $\nexists\, n^* : a_n$ è a segno costante $\forall\, n > n^*$

   $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{(-1)^n} \cdot n = (-1)^n \cdot n = \begin{cases} n & \text{se } n \in P \\ -n & \text{se } n \in D \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_n \frac{1}{a_n}$ Se ho $\frac{b_n}{a_n} = b_n \frac{1}{a_n}$

Teorema del quoziente:

Date $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$, se $\exists \lim b_n = l_1 \in \mathbf{R}$ e $\exists \lim a_n = l_2 \in \mathbf{R} - \{0\}$ allora $\exists \lim \frac{b_n}{a_n} = \frac{l_1}{l_2}$

Tale teorema risulta dal teorema del reciproco, poiché: se ho $\frac{b_n}{a_n} = b_n \frac{1}{a_n}$

Forme indeterminate:

Somma:	$a_n + b_n$	$a_n \longrightarrow +\infty$	$b_n \longrightarrow -\infty$	f.i. del tipo $+\infty + (-\infty)$
Prodotto:	$a_n \cdot b_n$	$a_n \longrightarrow \pm\infty$	$b_n \longrightarrow 0$	f.i. del tipo $\pm\infty \cdot 0$
Quoziente:	$\frac{b_n}{a_n} = b_n \frac{1}{a_n}$	$a_n \longrightarrow \pm\infty$	$b_n \longrightarrow \pm\infty$	f.i. del tipo $\frac{\infty}{\infty}$
		$a_n \longrightarrow 0$	$b_n \longrightarrow 0$	f.i. del tipo $\frac{0}{0}$

Esempi: $a_n \longrightarrow +\infty$ $\quad b_n \longrightarrow -\infty$ $\quad$ studio $a_n + b_n$

1) $a_n = n$ $\quad b_n = -n$ $\quad a_n + b_n = 0 \longrightarrow 0$

2) $a_n = n$ $\quad b_n = -2n$ $\quad a_n + b_n = -n \longrightarrow -\infty$

3) $a_n = n$ $\quad b_n = -n + (-1)^n = \begin{cases} -n+1 \text{ se } n \in \mathbf{P} \\ -n-1 \text{ se } n \in \mathbf{D} \end{cases}$

$a_n + b_n = (-1)^n$ non ha limite è oscillante

Teorema della Somma:

Se $\exists \lim a_n = +\infty(-\infty)$ e $\exists M \in \mathbf{R} : b_n > M \ \forall n$ ($b_n < M \ \forall n$), cioè la successione b_n è limitata inferiormente allora $\exists \lim (a_n + b_n) = +\infty\ (-\infty)$

OSSERVAZIONE: Se $\exists \lim b_n = l \in \tilde{\mathbf{R}}$ la successione $\{b_n\}_n$ è sicuramente limitata inferiormente se $l \in \mathbf{R}$ oppure $l = +\infty$, quindi se l ha questi valori posso eseguire la somma.

Esempio:

1. $c_n = -n + (-1)^n$ $c_n = a_n + b_n$ con $a_n = -n \longrightarrow -\infty; \{b_n\}_n$ è limitata ne consegue che $\lim c_n = -\infty$
2. $\lim (n + \sin n)$ $\quad c_n = a_n + b_n$ con $a_n = n \longrightarrow +\infty$ $\quad b_n = \sin n$ è limitata quindi $\lim c_n = +\infty$

Teoremi del Prodotto:

1. Se $\exists \lim a_n = 0$ e $\exists n > 0 : |b_n| \leq M \ \forall n$ (totalmente limitata), allora $\exists \lim (a_n \cdot b_n) = 0$

   Esempio:

   $(-1)^n \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ $\quad$ poiché è il prodotto di $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ e $(-1)^n$ che è limitata

2. Se $\exists \lim a_n = +\infty$ e $\exists M > 0$ e $\bar{n} : b_n > M, \ \forall n > \bar{n}$

   ($\{b_n\}_n$ è discosta positivamente dallo zero) allora $\exists \lim (a_n \cdot b_n) = +\infty$

   Se $\exists \lim a_n = +\infty$ e $\exists M > 0$ e $\bar{n} : b_n < -M, \ \forall n > \bar{n}$

   ($\{b_n\}_n$ è discosta negativamente dallo zero) allora $\exists \lim (a_n \cdot b_n) = -\infty$

   OSSERVAZIONI:

   - Se $\exists \lim b_n = l \in \tilde{\mathbf{R}}$ allora $\{b_n\}_n$ è discosta positivamente dallo zero se $l \in \mathbf{R}^+$ oppure $l = +\infty$;
   - Non basta richiedere che $b_n > 0, \ \forall n > \bar{n}$ perché in tal caso potrebbe essere che il $\lim b_n = 0$;

Limiti Particolari:

1. $\lim n^\alpha$ con $\alpha \in R$ $\quad \alpha = 0 \ \ n^\alpha = 1 \longrightarrow 1$

   $0 < \alpha < 1 \quad \lim n^\alpha = +\infty$

   $\alpha \geq 1 \ \ n^\alpha > n$ per il teorema da cui $\lim n \longrightarrow +\infty$

   $\alpha < 0 \quad n^\alpha = \frac{1}{n^{-\alpha}} \Rightarrow$ $-\alpha > 0$ dal caso precedente $n^{-\alpha} \longrightarrow +\infty$ e per il teorema del reciproco $\frac{1}{n^{-\alpha}} \longrightarrow 0$

Quindi riassumendo avremo che: $\lim n^\alpha = \begin{cases} +\infty \ \text{ se } \alpha > 0 \\ 1 \ \text{ se } \alpha = 0 \\ 0 \ \text{ se } \alpha < 0 \end{cases}$

2. $\lim P(n)$ polinomio di grado $r \in \mathbf{N}$ in n
   $P(n) = a_o n^r + a_1 n^{r-1} + \ldots + a_r$

   Raccogliendo il termine di grado massimo avremo che: $P(n) = \underbrace{n^r}_{+\infty}\underbrace{\left(a_0 + a_1\underbrace{\frac{1}{n}}_{0} + \underbrace{\ldots}_{0} + a_n\underbrace{\frac{1}{n^r}}_{0}\right)}_{a_0}$

   Il risultato finale dipende da a_o, quindi avremo che: $\lim P(n) = \begin{cases} -\infty & \text{se } a_0 < 0 \\ +\infty & \text{se } a_0 > 0 \end{cases}$

3. $\lim \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ con P(n) di grado $r \in \mathbf{N}$ in n e Q(n) di grado $s \in \mathbf{N}$ in n
   $Q(n) = b_o^s + b_1 n^{s-1} + \ldots + b_s$

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{n^r\left(a_0 + a_1\frac{1}{n} + \ldots + a_r\frac{1}{n^r}\right)}{n^s\left(b_0 + b_1\frac{1}{n} + \ldots + b_s\frac{1}{n^s}\right)} = n^{r-s}\underbrace{\frac{\left(a_0 + a_1\frac{1}{n} + \ldots + a_r\frac{1}{n^r}\right)}{\left(b_0 + b_1\frac{1}{n} + \ldots + b_s\frac{1}{n^s}\right)}}_{\frac{a_0}{b_0}} \qquad \lim n^{r-s} = \begin{cases} +\infty & \text{se } r > s \\ 1 & \text{se } r = s \\ 0 & \text{se } r < s \end{cases}$$

quindi $\lim \dfrac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} +\infty & \text{se } r > s \text{ e } \dfrac{a_0}{b_0} > 0 \\ -\infty & \text{se } r > s \text{ e } \dfrac{a_0}{b_0} < 0 \\ \dfrac{a_0}{b_0} & \text{se } r = s \\ 0 & \text{se } r < s \end{cases}$ Forma indeterminata, non risolvibile con teoremi.

4. $\lim a^n$ con $a \in \mathbf{R}$
   - $a > 1$ $\exists\, x > 0 : a = 1 + x$ da cui avremo che $a^n = (1 + x)^n > 1 + nx$ (disuguaglianza di Bernoulli), ma $\lim (1 + nx) = +\infty$ per il teorema del confronto si ha $\lim a^n = +\infty$;
   - $a = 1$ $a^n = 1 \longrightarrow 1$;
   - $-1 < a < 1$ considero:
     - $0 < a < 1$ allora $\exists\, b > 1 : a = \dfrac{1}{b}$ da cui $a^n = \left(\dfrac{1}{b}\right)^n = \dfrac{1}{b^n}$ essendo $\lim b^n = +\infty$ per il teorema sul reciproco $\dfrac{1}{b^n} \longrightarrow 0$ quindi avremo che $\lim a^n = 0$;
     - $a = 0 a^n = 0 \longrightarrow 0$;
     - $-1 < a < 0$, allora studio $|a| \Rightarrow 0 < |a| < 1$, $|a^n| = (|a|)^n$ quindi $0 < |a| < 1 \Rightarrow \lim |a|^n = 0$, ossia avremo che $\lim |a^n|^n = 0 \Rightarrow \lim a^n = 0$ (per un teorema del valore assoluto;
   - $a \leq 1$ considero:
     - $a = -1 \Rightarrow a^n = (-1)^n$ è una successione oscillante;
     - $a < -1 \Rightarrow a$ posso scriverlo come $(-1)|a|$ da cui $a^n = (-1)^n|a|^n \Rightarrow |a|^n > 1 \Rightarrow |a|^n \longrightarrow +\infty$, quindi la successione è oscillante;

Quindi riassumendo avremo che: $\lim a^n = \begin{cases} +\infty \ \text{se } a > 1 \\ 1 \ \text{se } a = 1 \\ 0 \ \text{se } -1 < a < 1 \text{ o } |a| < 1 \\ \nexists \ \text{se } a \leq -1 \end{cases}$

Esercizi:

$\lim \left(\underbrace{\sqrt{n+1}}_{+\infty} - \underbrace{\sqrt{n-1}}_{+\infty} \right)$ f.i $+\infty-\infty$

$$\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)=\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)}=\frac{(n+1)-(n-1)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)}=\frac{2}{\underbrace{\underbrace{\sqrt{n+1}}_{+\infty}+\underbrace{\sqrt{n-1}}_{+\infty}}_{+\infty}}\longrightarrow 0$$

Successioni Monotone:

Teorema se $\{a_n\}_n$ è monotona allora

$$\exists \lim a_n = \begin{cases} \sup a_n & \text{se c'è monotonia crescente o non decrescente} \\ \inf a_n & \text{se c'è monotonia decrescente o non crescente} \end{cases}$$

Dimostrazione: Nel caso di $\{a_n\}_n$ crescente o non decrescente e $\sup a_n \in \mathbf{R}$

Hp: 1) $a_n \leq a_n + 1$, $\forall$ n (oppure $a_n < a_n + 1$)

2) $\sup a_n = L \in R$, cioè:

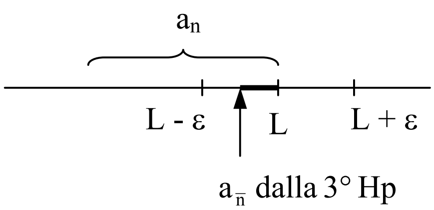
a) $a_n \leq L$, $\forall$ n;

b) $\varepsilon > 0\ \exists\ \bar{n}(\varepsilon) : a_{\bar{n}} > L - \varepsilon$

Th: $\lim a_n = L$ cioè $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n^*(\varepsilon) : \forall\ n > n^*$ si ha $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$

Dall'ipotesi 2a, avremo che: $a_n \leq L$, $\forall$ n e $L > L + \varepsilon$, $\forall\ \varepsilon > 0$, da ciò $a_n < L + \varepsilon$, $\forall$ n

Per l'ipotesi 2b avremo che $a_n > L - \varepsilon$, ma per la monotonia della prima ipotesi avremo $a_n \geq a_{\bar{n}}$, $\forall\ n > \bar{n}$ da ciò $a_n > L - \varepsilon$, $\forall\ n > \bar{n}$. In conclusione $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$, $\forall\ n > \bar{n}$ da cui la tesi con $n^* = \bar{n}$



Casi Particolari:

$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ si dimostra che la successione è crescente e limitata, ne consegue che per il teorema appena dimostrato ovvero che $\exists \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \in R$, per definizione questo limite si pone uguale a e.

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \qquad \text{Si dimostra che} \qquad \lim_{x \to x_0} e^x = \begin{cases} e^{x_0} \text{ se } x_0 \in R \\ +\infty \text{ se } x_0 \in R \\ 0 \text{ se } x_0 = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \to x_0} \ln x = \begin{cases} \ln x_0 \text{ se } x_0 \in R^+ \\ +\infty \text{ se } x_0 = +\infty \\ -\infty \text{ se } x_0 = 0 \end{cases}$$ da ciò si deducono i seguenti risultati:

$$\lim_{x \to x_0} f(l) = l \in \tilde{R} \text{ allora } \lim_{x \to x_0} e^{f(x)} = \begin{cases} e^l \text{ se } l \in R \\ +\infty \text{ se } l = +\infty \\ 0 \text{ se } l = -\infty \end{cases}$$ quindi avremo che:

$$\lim_{x \to x_0} \ln f(x) = \begin{cases} \ln l \text{ se } l \in R^+ \\ +\infty \text{ se } l = +\infty \\ -\infty \text{ se } l = 0 \end{cases}$$

Analoghi risultati si avranno per e^{a_n} e per $\ln a_n$

Successioni Esponenziali:

$(a_n)^{b_n}, b_n \in R, a_n > 0$ $\qquad (a_n)^{b_n} = e^{\ln(a_n)^{b_n}} = e^{b_n \cdot \ln(a_n)}$ studio il limite $\lim_n (b_n \cdot \ln a_n)$, avremo che: $(a_n)^{b_n}$ è in forma indeterminata se e solo se lo è il $\lim_n (b_n \cdot \ln a_n)$, cioè se b_n o ln a_n, uno tende a 0 e l'altro tende a $+\infty$, quindi avremo che: ∞^0, 0^0, 1^∞, poiché ln a_n tende a 0 o a $+\infty$, a_n assume certi valori.

<u>Teorema</u>:

Se $\exists \lim_n a_n = l_1 \in R^+ e \exists \lim_n b_n = l_2 \in R \Rightarrow \exists \lim_n (a_n)^{b_n} = (l_1)^{l_2}$

Esempio:

$\lim_n \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{3\cdot n}$ forma esponenziale $\frac{n+1}{n-1} \longrightarrow 1 \qquad 3n \longrightarrow +\infty \qquad$ f.i. 1^∞

Porto la base alla forma $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$\frac{n+1+1-1}{n-1} = 1 + \frac{2}{n-1} = 1 + \frac{1}{\frac{n-1}{2}} \text{ essendo } \frac{n-1}{2} = a_n$$

$$\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{2}{n-1}3n} = \left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2}}}_{\text{tende a } e}\right]^{\overbrace{\frac{2}{n-1}3n}^{\text{tende a } 6}} \longrightarrow e^6$$

<u>Terminologie:</u>

Se $\lim a_n = +\infty$ $(-\infty)$ allora $\lim \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$

$$\lim \left(\frac{3n+(-1)^n}{3n+\sqrt{n}}\right)^{\frac{n^2-1}{n}} \qquad \frac{3n+(-1)^n}{3n+\sqrt{n}} = \frac{\cancel{3n}\left(1+\overbrace{\frac{(-1)^n}{3n}}^{\text{tende a } 0}\right)}{\cancel{3n}\left(1+\underbrace{\frac{\sqrt{n}}{3n}}_{\text{tende a } 0}\right)} \xrightarrow{\text{tende a}} 1 \qquad \frac{n^2-1}{n} \longrightarrow +\infty$$

poiché n^2 è di ordine superiore a n, ne consegue che è una f.i. 1^∞

$$\left(\frac{3n+(-1)^n}{3n+\sqrt{n}}+1-1\right)^{\frac{n^2-1}{n}} = \left(1+\frac{3n+(-1)^n-3n-\sqrt{n}}{3n+\sqrt{n}}\right)^{\frac{n^2-1}{n}} = \left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{3n+\sqrt{n}}{(-1)^n-\sqrt{n}}}\right)^{\frac{3n+\sqrt{n}}{(-1)^n-\sqrt{n}}}}_{\text{tende a } e}\right]^{\frac{n^2-1}{n}\cdot\frac{(-1)^n-\sqrt{n}}{3n+\sqrt{n}}}$$

$\lim \frac{(-1)^n - \sqrt{n}}{3n + \sqrt{n}} \cdot \frac{n^2 - 1}{n} \longrightarrow -\infty$ per risolvere questo limite si possono raccogliere i termini di grado massimo.

Terminologia:
Se $\lim a_n = +\infty$ $(-\infty)$ allora diremo che $\{a_n\}_n$ è un infinito

Confronto fra Infiniti: $\lim a_n = \pm\infty$ $\lim b_n = \pm\infty$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} l \in R - \{0\} \text{ diremo che sono dello stesso ordine o che hanno la stessa velocità} \\ \pm\infty \text{ diremo che } \{a_n\}_n \text{ è di ordine superiore a } \{b_n\}_n \\ 0 \text{ diremo che } \{a_n\}_n \text{ è di ordine inferiore a } \{b_n\}_n \\ \nexists \text{ diremo che } \{a_n\}_n \text{ e } \{b_n\}_n \text{ sono non confrontabili} \end{cases}$$

Esempi:

$$\text{Se } a_n = n \qquad b_n = \begin{cases} 2n \longrightarrow \text{stesso ordine} \\ \sqrt{n} \longrightarrow \{a_n\}_n \text{ è di ordine superiore a } \{b_n\}_n \\ n^2 \longrightarrow \{a_n\}_n \text{ è di ordine inferiore a } \{b_n\}_n \\ n(2+(-1)^n) \longrightarrow \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2+(-1)^n} \text{ quindi } \nexists \lim \frac{1}{2+(-1)^n} \end{cases}$$

Se $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$ allora si scrive $a_n \sim b_n$ (a_n asintotico a b_n)

Dati quattro infiniti $\{a_n\}_n$, $\{b_n\}_n$, $\{c_n\}_n$, $\{d_n\}_n$ tali che $\{b_n\}_n$ sia di ordine inferiore a $\{a_n\}_n$ e $\{d_n\}_n$ sia di ordine inferiore a $\{c_n\}_n$,

Considero: $\lim \frac{a_n + b_n}{c_n + d_n} \Rightarrow \lim \frac{a_n}{c_n} \cdot \underbrace{\frac{\left(1 + \overbrace{\frac{b_n}{a_n}}^{\text{tende a } 0}\right)}{\left(1 + \underbrace{\frac{d_n}{c_n}}_{\text{tende a } 0}\right)}}_{\text{tende a } 1}$ Ne consegue che il limite di partenza si riduce a

$\lim \frac{a_n}{c_n}$ Nello studio di quozienti di infiniti $\left(\text{f.i.} \frac{\infty}{\infty}\right)$ si possono trascurare e/o eliminare a numeratore e/o a denominatore quegli infiniti di ordine inferiore rispetto ai rimanenti.

Confronto di infiniti Fondamentali:

Se considero n^a con $a > 0$ si ha n^{a_1} è di ordine superiore a n^{a_2} se $a_1 > a_2$

Se considero a^n con $a > 1$ si ha $(a_1)^n$ è di ordine superiore a $(a_2)^n$ se $a_1 > a_2$

Infatti: $\lim \frac{(a_1)^n}{(a_2)^n} = \lim \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^n$ quindi $\frac{a_1}{a_2} > 1$ da cui il limite sarà $\lim \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^n = +\infty$

Gli Infiniti:

$\ln n \quad$ vale anche per $(\log_a n, \forall a > 1)$

$n^a, \; a > 0$

$e^n \quad$ vale anche per $(a^n, a > 1)$

$n!$

n^n

Crescenza degli infiniti, cioè scendendo cresce l'ordine

$$\lim \frac{5n^7 + 7^n}{5^n + \sqrt{4n}} \longrightarrow \begin{cases} 7^n \text{ è di ordine superiore a } 5n^7 \\ 5^n \text{ è di ordine superiore a } \sqrt{4n} \end{cases} \qquad \lim \frac{7^n}{5^n} = +\infty$$

Altra risoluzione: $$\lim \frac{7^n \overbrace{\left(1 + \overbrace{\frac{5n^7}{7^n}}^{\text{tende a } 0}\right)}^{\text{tende a } 1}}{5^n \underbrace{\left(1 + \underbrace{\frac{\sqrt{4n}}{5^n}}_{\text{tende a } 0}\right)}_{\text{tende a } 1}} = +\infty$$

- Confronto tra $\ln(n^2 + 1)$ e $\ln(n + 1)$, sono dello stesso ordine? Per saperlo studio il limite:

$$\lim \frac{\ln(n^2+1)}{\ln(n+1)} = \lim \frac{\ln\left[n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right]}{\ln\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]} = \lim \frac{\overbrace{\ln n^2}^{2} + \overbrace{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}^{0}}{\underbrace{\ln n}_{1} + \underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{0}} = 2$$

Essendo il limite uguale a 2 gli infiniti precedenti sono dello stesso

- Confronto tra $\ln(1 + e^n)$ e $(n + 1)$

$$\lim \frac{\ln(1+e^n)}{n+1} = \lim \frac{\ln\left[e^n\left(1+\frac{1}{e^n}\right)\right]}{n+1} = \lim \frac{\overbrace{\ln e^n}^{n} + \overbrace{\ln\left(1+\frac{1}{e^n}\right)}^{0}}{\underbrace{n+1}_{n}} = 1 \quad \text{Sono dello stesso ordine}$$

- Considero: $\lim \sqrt[n]{n} = \lim n^{\frac{1}{n}} \longrightarrow$ forma esponenziale indeterminata del tipo ∞^0

$n^{\frac{1}{n}} = e^{\ln n^{\frac{1}{n}}} = e^{\frac{1}{n}\ln n}$ studio ora l'esponente e il suo limite $\lim\left(\frac{1}{n}\ln n\right) = \lim \frac{\ln n}{n} = 0$

poiché $\ln n$ è un infinito di ordine inferiore a n $\lim e^{\frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1$

$\lim\, (n^2+1)^{\frac{1}{\ln(n+1)}}$ f.i. ∞^0 $\qquad (n^2+1)^{\frac{1}{\ln(n+1)}} = e^{\frac{1}{\ln(n+1)}\ln(n^2+1)}$ studio il limite dell'esponente

$$\lim \frac{\ln(n^2+1)}{\ln(n+1)} = \lim \frac{\ln\left[n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right]}{\ln(n+1)} = 2 \Rightarrow \lim e^{\frac{1}{\ln(n+1)}\ln(n^2+1)} = e^2$$

$\lim\left(\frac{1}{5^n+n}\right)^{\frac{1}{2n+1}}$ f.i. 0^0 $\left(\frac{1}{5^n+n}\right)^{\frac{1}{2n+1}} = e^{\frac{1}{2n+1}\ln\left(\frac{1}{5^n+n}\right)}$ studio il limite dell'esponente

$$\lim\frac{\ln\left(\frac{1}{5^n+n}\right)}{2n+1} = \lim\frac{-\ln(5^n+n)}{2n+1} = \lim\frac{-\ln\left[5^n\left(1+\frac{n}{5^n}\right)\right]}{2n+1} = \lim-\frac{\ln 5^n+\ln\left(1+\frac{n}{5^n}\right)}{2n+1} = -\frac{\ln 5}{2}$$

$$\lim e^{\frac{1}{2n+1}\ln\left(\frac{1}{5^n+n}\right)} = e^{-\frac{\ln 5}{2}}$$

<u>Sottosuccessioni:</u>

Data una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ considero $\mathbf{N}^I \subseteq \mathbf{N}$ ma con infiniti elementi, chiamo sottosuccessione la legge che ad ogni $n \in \mathbf{N}^I$ associa a_n e la indico $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}^I}$ oppure $a_n/_{\mathbf{N}^I}$

$\lim a_n/_{\mathbf{N}^I} = l \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\bar{n}(\varepsilon) : \forall\ n > \bar{n}(\varepsilon),\ n \in \mathbf{N}^I$ si ha $|a_n - l| < \varepsilon$ in questo caso $n \in N^I$ è obbligatorio

Vale ovviamente il seguente teorema:

Se $\exists \lim a_n = l \in \tilde{\mathbf{R}}$ allora ogni sottosuccessione di $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ ha limite l.

Se data una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, esistono due sue sottosuccessioni che hanno limiti diversi tra loro ne consegue che $\nexists \lim a_n$

<u>Casi particolari di sottosuccessioni sono:</u>

1. $\mathbf{N}^I = \mathbf{P}$ sottosuccessione di posto pari
2. $\mathbf{N}^I = \mathbf{D}$ sottosuccessione di posto dispari

$$a_n = (-1)^n \begin{cases} a_n/_P = 1 \longrightarrow 1 \\ a_n/_D = -1 \longrightarrow -1 \end{cases}$$ I due limiti sono diversi allora $\nexists \lim (-1)^n$

<u>Teorema:</u>

Se $\exists \lim a_n/_{\mathbf{P}} = l \in \tilde{\mathbf{R}}$ e $\exists \lim a_n/_{\mathbf{D}} = l$ allora $\exists \lim a_n = l$

<u>Esempi:</u>

$$a_n = \frac{(-1)^n n+1}{2n+1} \begin{cases} a_n/_P = \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} \\ a_n/_D = \frac{-n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$ Ne consegue che $\nexists \lim a_n$

$$a_n = \frac{n^3+(-1)^n}{n-n^2+(-1)^n} \quad \lim\frac{n^3+(-1)^n}{n-n^2+(-1)^n} = \lim\frac{n^3\overbrace{\left(1+\overbrace{\frac{(-1)^n}{n^3}}^{0}\right)}^{1}}{n^2\underbrace{\left(\underbrace{\frac{1}{n}}_{0}-1+\underbrace{\frac{(-1)^n}{n^2}}_{0}\right)}_{-1}} = -\infty$$ oppure

$$a_n = \frac{n^3+(-1)^n}{n-n^2+(-1)^n} \begin{cases} \lim a_n/_{P} = \lim \dfrac{n^3\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(\dfrac{1}{n}-1+0\right)} = -\infty \\ \lim a_n/_{D} = \lim \dfrac{n^3\left(1-\dfrac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(\dfrac{1}{n}-1-0\right)} = -\infty \end{cases}$$

Quindi $\exists \lim \dfrac{n^3-(1)^n}{n-n^2+(-1)^n} \longrightarrow -\infty$

Data la successione $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{n+1}}$ si chiede se è monotona e se è limitata.

1) Verifico che $a_n < a_{n+1}$, $\forall n$, cioè $\dfrac{n}{\sqrt{n+1}} < \dfrac{n+1}{\sqrt{n+2}}$ essendo tutte quantità positive, equivale a $\quad n\sqrt{n+2} < (n+1)\sqrt{n+1}$
   $n^2(n+2) < (n+1)^2(n+1) \Leftrightarrow n^3 + 2n^2 < (n+1)^3 \Leftrightarrow 2n^2 < 3n^2 + 3n + 1 \Leftrightarrow 0 < n^2 + 3n + 1$
   È clamorosamente vera, quinti la successione è crescente.
1) Essendo a_n crescente posso affermare che a_n è limitata inferiormente.
   sup $a_n \in \mathbf{R}$? No poiché il sup $a_n = \lim a_n = +\infty$ e la successione è crescente.
   $\lim \dfrac{n}{\sqrt{n+1}} = +\infty$ Quindi la successione a_n non è limitata.

Esercizio:

$A \underbrace{\left[\frac{1}{2},1\right[}_{A_1} \cup \underbrace{\left\{x = \frac{n-3}{2n}, n = 1,2,3,\ldots,\right\}}_{A_2}$ $\qquad \mathring{A}_1 = \left]\frac{1}{2},1\right[$ $\qquad \mathring{A}_2 = \emptyset$ poiché è un infinito numerabile.

Ne consegue che l'insieme non è aperto perché i punti interni dovrebbero coincidere.

$\overset{\circ}{A} = \left]\frac{1}{2}, 1\right[\neq A$ quindi A non è aperto

fr. $A_2 = A_2 \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$ $\quad$ $x_0 \in$ fr $A_2 \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0$ si ha $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap A_2 \neq 0$

$]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap CA_2 \neq 0$ se $x_0 \in A_2$ si ha $x_0 \in\,]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap A_2$ e $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap CA_2 \neq 0$ poiché A_2 è numerabile e $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ è continuo.

$\frac{1}{2}$ è di frontiera per $A_2 \Leftrightarrow \left]\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon\right[\cap A_2 \neq 0$ poiché $\frac{1}{2} = \lim a_n = \sup a_n$ e

$\left]\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon\right[\cap CA_2 \neq 0$ poiché l'elemento $\frac{1}{2}$ vi è sicuramente contenuto, quindi

fr. $A = A_2 \cup \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$ fr. $A_1 = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$, acc. $A_1 = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

$1 \in \text{acc.}A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{x} \in A_1 : \bar{x} \neq 1$ e $\bar{x} \in \left]1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon\right[$

acc. $A_2 = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ poiché $\frac{1}{2} = \lim_n a_n$

Un insieme si dice aperto se contiene i suoi punti di accumulazione. Il nostro insieme quindi è chiuso poiché 1 è di accumulazione ma non appartiene ad A.

<u>Esempi:</u>

$$\lim \frac{\sqrt{n^4 + n^3} - n^2}{2n + 1} = \frac{+\infty - \infty}{\infty} \quad \text{f.i.}$$

$$\frac{\left(\sqrt{n^4 + n^3} - n^2\right)}{(2n + 1)} \cdot \frac{\left(\sqrt{n^4 + n^3} + n^2\right)}{\left(\sqrt{n^4 + n^3} + n^2\right)} = \frac{n^3}{(2n + 1) \cdot \left(\sqrt{n^4 + n^3} + n^2\right)} \qquad \frac{\infty}{\infty} \quad \text{f.i.}$$

$$\frac{n^3}{n\left(2 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{0}\right) n^2 \left(\underbrace{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}_{1} + 1\right)} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \lim \frac{\sqrt{n^4 + n^3} - n^2}{2n + 1} = \frac{1}{4}$$

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^3 + 2n^2} - n\right) = \infty - \infty \qquad \text{f.i.}$$ sapendo che $(a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

considero $a = \sqrt[3]{n^3 + 2n^2}$ e $b = n$

$$\left(\sqrt[3]{n^3 + 2n^2} - n\right) = \frac{\left(\left(n^3 + 2n^2\right)^{\frac{1}{3}} - n\right) \cdot \left[\left(n^3 + 2n^2\right)^{\frac{2}{3}} + n\left(n^3 + 2n^2\right)^{\frac{1}{3}} + n^2\right]}{\left(n^3 + 2n^2\right)^{\frac{2}{3}} + n \cdot \left(n^3 + 2n^2\right)^{\frac{1}{3}} + n^2} =$$

$$= \frac{2n^2}{\left(n^3 + 2n^2\right)^{\frac{2}{3}} + n\left(n^3 + 2n^2\right)^{\frac{1}{3}} + n^2} \longrightarrow \frac{2}{3} \Rightarrow \lim\left(\sqrt[3]{n^3 + 2n^2} - n^2\right) = \frac{2}{3}$$

Se gli infiniti di tipo $+\infty - \infty$ o $\frac{\infty}{\infty}$ sono di ordine diverso posso procedere nei vari modi o raccogliendo il limite più alto.

$\lim \left(\frac{\sqrt{n^2+2n}}{\sqrt{n^2-n}} \right)^n$ f.i. 1^∞ devo ricondurla a una forma del tipo $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$

$$\left(\frac{\sqrt{n^2+2n}}{\sqrt{n^2-n}} + 1 - 1 \right)^n = \left(1 + \frac{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-n}}{\sqrt{n^2-n}} \right)^n =$$

$$= \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{n^2-n}}{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-n}}} \right)^{\frac{\sqrt{n^2-n}}{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-n}}} \right]^{n\frac{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-n}}{\sqrt{n^2-n}}} = e^{\frac{n\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-n}\right)}{\sqrt{n^2-n}}}$$

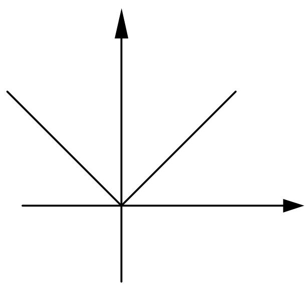
Si studia infine l'esponente $\frac{n(2n+n)}{\sqrt{n^2-n}\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-n}\right)} = \frac{3n^2}{\sqrt{n^2-n}\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-n}\right)} \to \frac{3}{2}$

Ne consegue che $\lim \left(\frac{\sqrt{n^2+2n}}{\sqrt{n^2-n}} \right)^n = e^{\frac{3}{2}} = \sqrt{e^3}$

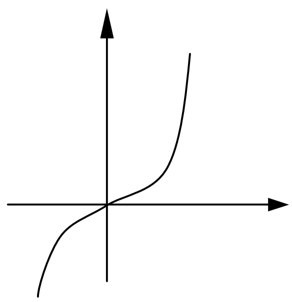
Funzioni: Data $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ ($A = Df$) si dice funzione pari o simmetrica se $f(x) = f(-x)$, $\forall\, x \in A$ (simmetria rispetto all'asse delle y);
Si dice funzione dispari o asimmetrica se $f(x) = -f(-x)$, $\forall\, x \in A$ (simmetria rispetto all'asse delle x);
Si dice periodica di periodo t se $f(x) = f(x + t)$, $\forall\, x \in A$

Esempi:

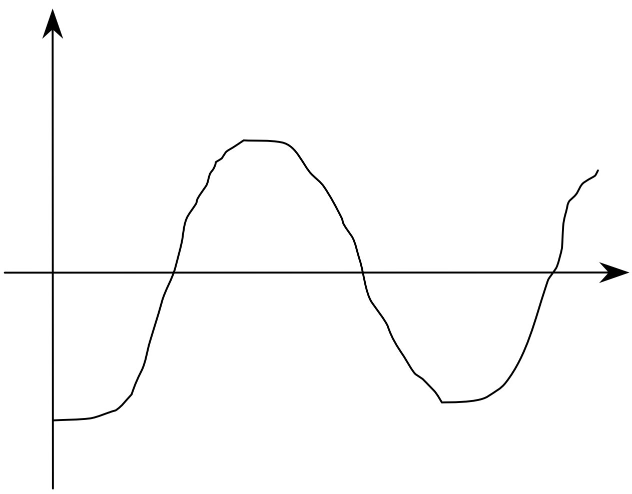
$f(x) = |x|$ è pari



$f(x) = x^3$ è dispari



$f(x) = \text{sen } x$ è periodica di periodo 2π



Funzione Inversa:

$f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ iniettiva allora $\exists\, f^{-1} : f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$
Se f è monotona crescente o decrescente allora è iniettiva, ossia invertibile

Composizione di Funzioni:

$f : A \longrightarrow Cf$ $\qquad g : B \longrightarrow Cg$ $\qquad F : A \longrightarrow Cg$

$F(x) = g(f(x))$ dunque $Cf \subseteq B$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "F"'] & Cf \subseteq B \arrow[r, bend left, "g"] & Cg \end{tikzcd}$$

$F = g \circ f$ e si legge f composto g

Esempi:

$F(x) = \sqrt{x^2+1}$ $\qquad f(x) = x^2 + 1$ $\qquad g(x) = \sqrt{x}$

$F(x) = \sin x^2$ $\qquad f(x) = x^2$ $\qquad g(x) = \sin x$ (prima si esegue f(x) e poi g(x), cioè la radice quadrata di f(x))

Restrizione e prolungamento:

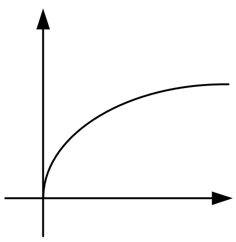
Data $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ considero un sottoinsieme del Df cioè un insieme $A^I \subseteq$ in A, si chiama ***restrizione*** della funzione f ad A^I la funzione $f/_{A^I} : A^I \longrightarrow \mathbf{R}$ così definita $f/_{A^I}(x) = f(x)$

Se considero $A^{II} \supseteq A$ chiamo prolungamento di f ogni funzione $g : A^{II} \longrightarrow \mathbf{R} : g/_{A} = f(x)$

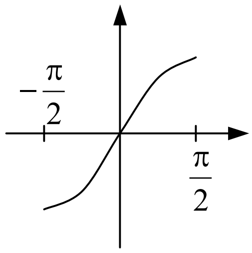
Data $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ non necessariamente iniettiva si cerca $A^I \subseteq A$ tale che $f/_{A^I} : A \longrightarrow \mathbf{R}$ sia iniettiva, cioè si lavora con la restrizione, e se ciò è possibile, allora $f/_{A^I}$ ha funzione inversa.

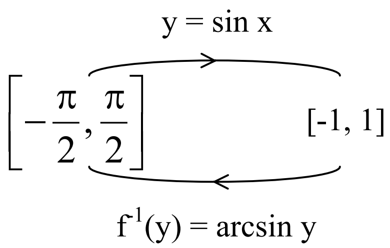
Funzioni inverse:

1. Considero $f(x) = x^2$ è pari, non iniettiva nel suo dominio. Se la restringo a $\mathbf{R}_0^+$ allora $f/_{\mathbf{R}_0^+}$ è iniettiva (ha monotonia crescente) dunque è invertibile.
   $y = x^2$, $x \in \mathbf{R}_0^+$ la sua inversa è $x = \sqrt{y}$
   Se considero la funzione inversa come nuova funzione, cioè $g(x) = \sqrt{x}$, il suo grafico sarà:



2. Considero f(x) = sin x è periodica dunque non iniettiva. Se la restringo all'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ho monotonia crescente e dunque infettività e il grafico sarà:

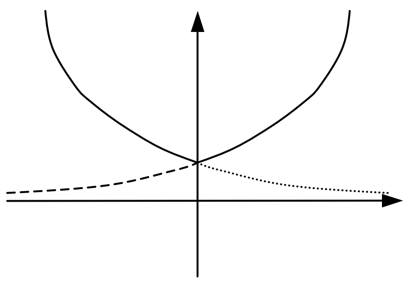




3. Considero f(x) = cos x, considero la restrizione a [0, π]

Esempi:

1) $f(x) = 2^{|x|}$ $\quad$ $Df = \mathbf{R}$

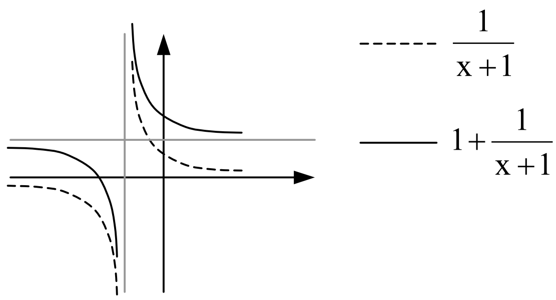


f è pari poiché f(x) = f(-x)
Quindi avremo che La funzione $2^{|x|} = 2^{|x|}$, $\forall x \geq 0$, utilizzando il grafico della funzione 2^x ed eseguendone il simmetrico rispetto all'asse y avremo il grafico della funzione $2^{|x|}$, tale simmetria però va eseguita solo per la parte positiva. Dal grafico si nota che la funzione ha un limite inferioreche avrà valore 1, cioè f(0) = 1 non ha però $\sup\limits_{x \in \mathbf{R}} 2^{|x|} = +\infty$ (limite superiore);

2) $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$ per x < 0, questa condizione non è il dominio, ma è stata posta perché voglio studiare la funzione nella parte negativa, quindi si ha $\frac{1}{x} < 0$ quindi $0 < 3^{\frac{1}{x}} < 1 \Rightarrow f(x)$ è limitata, inoltre $\inf\limits_{x<0} 3^{\frac{1}{x}} = 0$ $\qquad$ $\sup\limits_{x<0} 3^{\frac{1}{x}} = 1$. Inoltre nell'intervallo considerato $3^{\frac{1}{x}}$ è monotona decrescente, poiché è decrescente l'esponente $\left(3^{\frac{1}{x}} \text{ è una funzione composta}\right)$

3) $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$ $\quad$ $Df = \mathbf{R} - \{-1\}$

$$\frac{x+2}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}$$



Dal grafico si nota che la funzione non è limitata , ma se considero la sua restrizione a $]-1, +\infty[$ allora ho monotonia decrescente, da cui infettività ed esistenza dell'inverso.

$$]-1, +\infty[\quad \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \quad]1, +\infty[$$

Per calcolare $f^{-1}(2)$ e $f^{-1}(4)$ si procede nel seguente modo

$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$ con $y = 2$ cerco $x : f^{-1}(2) = x$ ossia cerco $x : f(x) = 2$

N.B. ho solo una soluzione, altrimenti non avrei potuto svolgere f^{-1})

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{x+1} = 2 \qquad x = 0 \quad f^{-1}(2) = 0$$

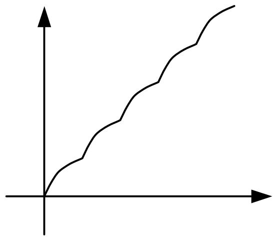
$$\Rightarrow 1+\frac{1}{x+1} = 4 \qquad \frac{1}{x+1} = 3 \qquad x = -\frac{2}{3} \qquad f^{-1}(4) = -\frac{2}{3}$$

4) Disegnare la funzione $f(x) = [x]+\sqrt{x-[x]}$ $x \geq 0$

$0 \leq x < 1$ $[x] = 0$ $f(x) = \sqrt{x}$

$1 \leq x < 2$ $[x] = 1$ $f(x) = 1+\sqrt{x-1}$

e così via…



Teorema:

Data $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ considerato $x_0 \in \tilde{\mathbf{R}}$ di accumulazione per A si ha $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \tilde{\mathbf{R}} \Leftrightarrow$

$\forall \{x_n\}_n$ con $\lim\limits_n x_n = x_0$ si verifica che $\lim\limits_n f(x_n) = l$ (Caratterizzazione sequenziale del limite)

Questo vuol dire che tutti i teoremi sulle successioni valgono anche per i limiti tranne 2 eccezioni.

Teorema del valore Assoluto:

Se $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbf{R}$ allora $\exists \lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$

Per le successioni non vale il viceversa se non con $l = 0$

Esempio:

Cerco $f(x) : \exists \lim\limits_{x \to x_0} |f(x)|$, ma $\nexists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ $\quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbf{Q} \\ -1 & x \in \mathbf{R}-\mathbf{Q} \end{cases}$ preso $x_0 \in \mathbf{R}$ $\nexists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ poiché vicino al punto x_0 ci sono infiniti razionali e infiniti irrazionali.

Tutte le funzioni che hanno una soluzione sui razionali e una sugli irrazionali si dicono funzioni di DIRICHLET.

Limite di Restrizione:

Data $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ considerato $B \subseteq A$ suppongo che x_0 sia di accumulazione per B.

$\lim\limits_{x \to x_0} f/_B(x) = l \in \mathbf{R}$ oppure che $x_0 \in R$, cioè $+\infty$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < |x- x_0| < \delta, x \in B \Rightarrow \left|f/_B(x)-l\right| < \varepsilon$ essendo $x \in B$ avrò che $|f(x) - l| < \varepsilon$

Data questa definizione esiste sicuramente il seguente:

Teorema:

Se $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ (con $x_0 \in \widetilde{\mathbf{R}}$ e $l \in \widetilde{\mathbf{R}}$) allora $\forall$ B $\subseteq$ A purché x_0 sia di accumulazione anche per B si ha che $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f/_{B}(x) = l$

Se $\exists$ (B_1 e B_2) aventi x_0 come punto di accumulazione e tali che $\lim\limits_{x \to x_0} f/_{B_1}(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0} f/_{B_2}(x)$ allora $\nexists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

<u>Esempi:</u>

1) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbf{Q} \\ -1 & x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q} \end{cases}$

$B_1 = \mathbf{Q} \quad B_2 = \mathbf{R} - \mathbf{Q} \Rightarrow f/_{B_1}(x) = 1 \quad$ e $\quad f/_{B_2}(x) = -1$

$\forall\, x_0 \in \mathbf{R}$ allora si ha che x_0 è di accumulazione sia per B_1 che per B_2

$\lim\limits_{x \to x_0} f/_{B_1}(x) = 1 \qquad \lim\limits_{x \to x_0} f/_{B_2}(x) = -1$ Sono diversi quindi $\nexists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

2) Voglio dimostrare che $\nexists \lim\limits_{x \to \pm\infty} \sin x$

$B_1 = \{x \in \mathbf{R} : x = k\pi, \forall\, k \in \mathbf{Z}\}$ $+\infty$ ($-\infty$) è di accumulazione per B_1 poiché B_1 è non limitato superiormente (o inferiormente).

Se ritengo $f(x) = \sin x$ a $f/_{B_1}(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} f/_{B_1}(x) = 0$

$B_2 = \left\{x \in \mathbf{R} : x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \forall\, k \in \mathbf{Z}\right\}$ $\pm\infty$ di accumulazione per B_2

$f/_{B_2}(x) = 1 \qquad \forall\, x \qquad \lim\limits_{x \to \pm\infty} f/_{B_2}(x) = 1$

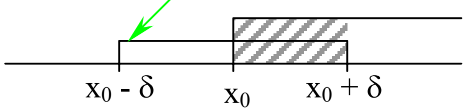
i due limiti sono diversi fra loro e quindi $\nexists \lim\limits_{x \to \pm\infty} \sin x$

N.B: Non è necessario prendere B_1 e B_2 complementari.

<u>Casi particolari di Restrizioni:</u>

$f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ considero $x_0 \in \mathbf{R}$ di accumulazione per A prendo $B_1 = \{x \in A : x > x_0\}$ e $B_2 = \{x \in A : x < x_0\}$ e suppongo x_0 di accumulazione per B_1 e B_2

$\lim\limits_{x \to x_0} f/_{B_1}(x) = l \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta,\ x \in B_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$



$x_0 < x < x_0 + \delta$ con $x \in A$ che equivale a $0 < |x - x_0| < \delta,\ x \in B_1$

Invece di scrivere $\lim\limits_{x \to x_0} f/_{B_1}$ scriveremo $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ cioè limite di f(x) per x che si avvicina a x_0 da destra.

Analogamente al posto di $\lim\limits_{x \to x_0} f/_{B_2}$ scriveremo $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 : x_0 - \delta < x < x_0$ con $x \in A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

<u>Teorema:</u>

Se $\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \in \tilde{\mathbf{R}}$ e $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$ allora $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l$

Esempio:

Studio del $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ uso il teorema del limite sul reciproco

$\lim_{x \to 0} x = 0$ spezzo il limite in limite destro e sinistro

$\lim_{x \to 0^+} x = 0$ per valori positivi $\Rightarrow \exists \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} x = 0$ per valori negativi $\Rightarrow \exists \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Quindi $\nexists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$

Successioni definite per ricorrenza:

1. Se $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{3a_n}, \forall n \geq 1$
2. $a_1 = 3,\ a_{n+1} = \frac{1}{a_n}, \forall n \geq 1$
3. $a_1 = 0,\ a_{n+1} = 2a_n + 1, \forall n \geq 1$

Se $a_1 = 1, a_2 = \sqrt{3},\ a_3 = \sqrt{3\sqrt{3}}, \ldots$ a_n è crescente? Lo sarà se

$a_{n+1} > a_n \forall n$ ossia $\sqrt{3a_n} > a_n$ poichè a_n è sotto radice, $a_n > 0$ quindi elevato al quadrato $3a_n > (a_n)^2$

dividendo per a_n, avremo $3 > a_n$

Concludendo: se $3 > a_n$ è vera la successione è crescente

1. $a_n = 1 \quad a_{n+1} = \sqrt{3a_n}, \quad \forall n \geq 1$ La successione è crescente se e solo se si verifica che $a_n < 3, \ \forall n$

   Dimostro che $a_n < 3, \ \forall n$ per induzione:

   Per n = 1 ho $a_1 = 1 < 3$ $\quad a_n < 3, \ \Rightarrow a_{n+1} < 3$ $\quad a_n < 3$ implica che $3a_n < 9$ ricordando che $a_n > 0$ si ha $\sqrt{3a_n} < \sqrt{9}$ da cui abbiamo $\sqrt{3a_n} = a_{n+1}$ da cui la tesi.

   La successione è crescente e limitata ($1 \leq a_n < 3, \ \forall n$) dunque $\exists \lim_n a_n = l \in R$ e $l = \sup_n a_n$ e $l \geq 1$ la relazione $a_{n+1} = \sqrt{3a_n} \Rightarrow l = \lim_n a_{n+1} = \lim_n \sqrt{3a_n} = \sqrt{\lim_n (3a_n)} = \sqrt{3 \cdot l}$ Allora abbiamo la seguente identità: $l = \sqrt{3 \cdot l} \quad l^2 = 3 \cdot l \quad l^2 - 3 \cdot l = 0 \quad l(l-3) = 0$ possiamo concludere che l = 3 poiché 0 non è accettabile.

2. $a_n = 3 \quad a_{n+1} = \frac{1}{a_n}, \quad a_4 = a_2 = \frac{1}{3} \quad a_5 = a_3 = 3 \quad a_n \begin{cases} 3 & \text{se n è dispari} \\ \frac{1}{3} & \text{se n è spari} \end{cases}$

   $\nexists \lim_n a_n$ poiché è oscillante

3. $a_n = 0 \quad a_{n+1} = 2a_n + 1 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = 3 \quad a_4 = 7 \quad a_5 = 15 \quad a_6 = 31$

   $a_{n+1} = a_n + 2^{n-1}$ dimostrabile per induzione $a_n > 0, \forall n \quad a_{n+1} = a_n + 2^{n-1} \geq 2^n$ da cui $a_{n+1} \geq 2^n$ poiché $2^n = +\infty$ possiamo concludere, per un teorema di confronto, si ha $\exists \lim_n a_n = +\infty$

FUNZIONI

Teorema di limitatezza locale:

Se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \in R$ allora è localmente limitata, cioè vicino a x_0

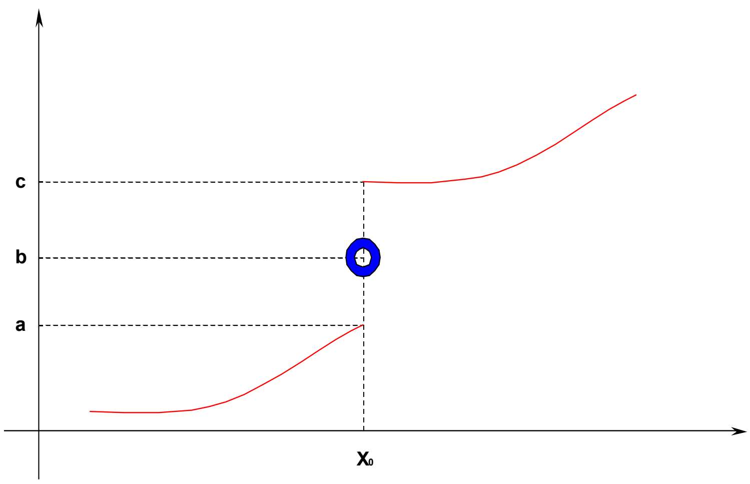
$\exists M > 0 \text{ e } \exists r > 0 : |f(x)| \leq M, \forall x \in \left]x_0 - r, x_0 + r\right[\cap Df(\text{se } x_0 \in R)$

$f(x) = x \quad Df = R$ non limitata $\quad \lim_{x \to 0} f(x) = 0 \in R \longrightarrow$ 1° teorema diverso dalle successioni.

Teorema sulle funzioni monotone:

Data f: A → R monotona non decrescente o crescente, allora

$$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = c = \inf_{x > x_0} f(x) \qquad \exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = a = \sup_{x < x_0} f(x)$$



Applicazioni importanti di questo teorema

a) $f(x) = e^x$ funzione crescente, quindi $\exists \lim_{x\to+\infty} e^x = \sup_{x\in R} e^x = +\infty$ poiché la funzione è non limitata superiormente:

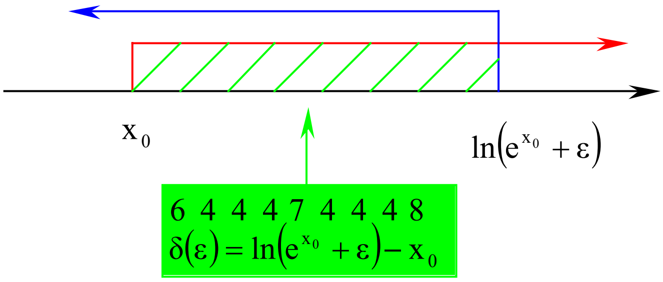
$f(x) = e^x$ $\quad \exists \lim_{x\to-\infty} e^x = \inf_{x\in R} e^x = 0^+$

$f(x) = e^x$ $\quad \exists \lim_{x\to x_0^+} e^x = \inf_{x>x_0} e^x \ge e^{x_0}$ $\quad \exists \lim_{x\to x_0^-} e^x = \sup_{x<x_0} e^x \le e^{x_0}$

Dimostro che $\lim_{x\to x_0} e^x = e^{x_0}$ con la definizione di limite destro

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon) > 0 : x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |e^x - e^{x_0}| < \varepsilon$ verificare questa definizione vuol dire trovare $\delta(\varepsilon) > 0$

$|e^x - e^{x_0}| < \varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases} e^x < e^{x_0} + \varepsilon \\ e^x > e^{x_0} - \varepsilon \end{cases}$ $\quad x > x_0$ allora per la monotonia $e^x > e^{x_0} > e^{x_0} - \varepsilon, \forall\varepsilon > 0$ quindi $e^x > e^{x_0} - \varepsilon$ è verificata per ogni $x > x_0$, quindi risolvo $e^x < e^{x_0} + \varepsilon$ risulta $x = \ln(e^{x_0} + \varepsilon)$ $\ln(e^{x_0} + \varepsilon) > x_0$ quindi abbiamo



Analogamente si dimostra che anche il $\lim_{x\to x_0^-} e^x = e^{x_0}$, quindi per il teorema $\exists \lim_{x\to x_0} e^x = e^{x_0}$

b) $f(x) = x^n$ $\quad \lim_{x\to 0} x^n = 0$ $\quad \lim_{x\to 0^+} x^n = 0$ lo dimostro con la definizione di limite

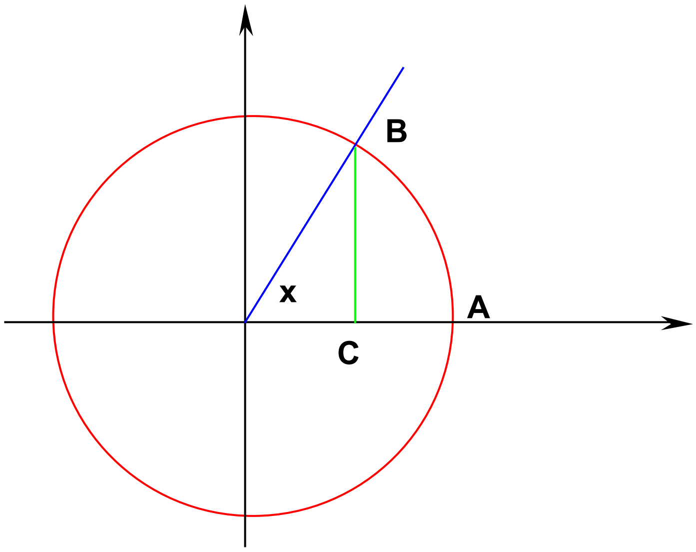
$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon) > 0 : 0 < x < 0 + \delta \Rightarrow |x^n - 0| < \varepsilon$

$|x^n| < \varepsilon$ poiché $x > 0$ equivale $x^n < \varepsilon$ da cui $x < \sqrt[n]{\varepsilon}$ cioè $x < \varepsilon^{\frac{1}{n}}$ in conclusione $|x^n| < \varepsilon$ $\Leftrightarrow 0 < x < \varepsilon^{\frac{1}{n}}$ quindi prendo $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{n}}$ Questo risultato può essere esteso, cioè: $\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n, \forall x_0 \in R$ si può dimostrare che, cambiando variabile $x = x_0 + h$ $\quad h = x - x_0$ $\quad h \in R$

$x \to x_0 \Leftrightarrow h \to 0$ $\quad \lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n \Leftrightarrow \lim_{h\to 0}(x_0 + h)^n$ e quest'ultima la dimostro con il binomio di Neewton, cioè: $(x_0 + h)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x_0^r \cdot h^{n-r}$ quindi per quanto dimostrato prima h → 0 quindi il risultato sarà solo x_0^n

c) f(x) = sen x   dimostro che $\lim_{x\to 0} \text{sen } x = 0$

dimostro che il $\lim_{x\to 0^+} \text{sen } x = 0$ con un teorema di confronto e con il cerchio trigonometrico (cioè di raggio uguale a 1), x quindi è espresso in radianti.



$AB = x$ si ha che: $\overline{BC} = \text{sen } x \Rightarrow \overline{BC} < AB$ da cui $0 < \text{sen } x < x$

$\left.\begin{array}{l} 0 \to 0 = 0 \\ x \to 0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ per il teorema dei 2 carabinieri $\exists \lim_{x\to 0^+} \text{sen } x = 0$

$\lim_{x\to 0^-} \text{sen } x = 0$ lo dimostro con il cambio di variabile $x = -y$ $x \to 0^- \Leftrightarrow y = 0^+$

$\lim_{y\to 0^+} \text{sen}(-y) = \lim_{y\to 0^+} -[\text{sen } y] = 0$ questo risultato può essere esteso, cioè:

$\lim_{x\to x_0} \text{sen } x = \text{sen } x_0,\ \ x_0 \in R$ $\lim_{x\to x_0} \text{sen } x = \lim_{h\to 0} \text{sen}(x_0 + h)$ utilizzando le formule di addizione avrò:

$\lim_{h\to 0}\left(\text{sen } x_0 \cdot \underbrace{\cos h}_{1} + \cos x_0 \cdot \underbrace{\sin h}_{0}\right)$ se dimostriamo che $\cos h \to 1$ avremo che $\lim_{x\to x_0} \text{sen } x = \text{sen } x_0$

d) $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$ posso considerare $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ per cui cos x > 0

$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ poichè $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ sapendo che $\lim_{x\to 0} \text{sen } x = 0$ allora per i teoremi sui limiti avremo che: $\lim_{x\to 0} \text{sen}^2 x = 0$ $\lim_{x\to 0}(1 - \text{sen}^2 x) = 1$ $\lim_{x\to 0} \sqrt{(1 - \text{sen}^2 x)} = \sqrt{1} = 1$

da cui la tesi. Da ciò deduco che $\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$, $\forall x_0 \in R$ (si dimostra come per e^x)

$\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$ per il teorema sulle funzioni monotone crescenti abbiamo che $\lim_{x\to +\infty} \ln x = \sup_{x\in R^+} \ln x = +\infty$ perché non è limitata superiormente

Discorso analogo per $\lim_{x\to +\infty} \ln x = \inf_{x>0} \ln x = -\infty$

Limiti Notevoli

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$ con P e Q polinomi in x stessi risultati delle successioni, attenti però a:

$$\lim_{x\to-\infty} x^n \begin{cases} +\infty & \text{se } n\in P \\ -\infty & \text{se } n\in D \end{cases}$$

2) Confronto di infiniti:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty(-\infty)$ si dice che è un infinito se anche: $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty(-\infty)$ allora posso confrontare f(x) e g(x), se però tutte e due hanno x → $x_o = \pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} \begin{cases} l\in R - \{0\} & \text{f e g si dicono infiniti dello stesso ordine} \\ 0 & \text{f si dice di ordine inferiore a g, o g di ordine superiore a f} \\ +\infty(-\infty) & \text{vedi } l\in R - \{0\} \\ \nexists & \text{f e g non sono confrontabili} \end{cases}$$

Vale la seguente proprietà (principio di sostituzione degli infiniti)
Nello studio di quozienti di infiniti si possono trascurare a numeratore e/o a denominatore (separatamente) gli infiniti di ordine inferiore rispetto ai rimanenti.
Per x → + ∞ i seguenti infiniti sono di ordine crescente:

- l_n x ($\log_a$ x, ∀a > 1);
- x^a, ∀a > 0;
- e^x (a^x, ∀a > 1);

ESEMPIO:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x+5\cdot 3^{\sqrt{x}}-x^{10}}{3^{\ln x}+4^{\frac{x}{2}+1}} = \text{poichè} \quad \begin{matrix} 2^x \text{ è di ordine superiore a } x^{10} \\ 4^{\frac{x}{2}+1} \text{ è di ordine superiore a } 3^{\ln x} \end{matrix}$$

Per sapere se è di ordine superiore 2^x o $3^{\sqrt{x}}$ studio

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^{\sqrt{x}}}{2^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\sqrt{x}\cdot\ln 3}}{e^{x\cdot\ln 2}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\sqrt{x}\cdot\ln 3 - x\cdot\ln 2} = 0 \quad \text{poichè}:$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}\cdot\ln 3 - x\cdot\ln 2\right) = \lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(\frac{\ln 3}{\sqrt{x}} - \ln 2\right)\right] = -\infty$$

Quindi avremo che 2^x è di ordine superiore. Confronto ora il denominatore

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^{\sqrt{x}}}{2^x} = \quad \text{poichè} \quad 4^{\frac{2}{x}} = 4\cdot 2^x \longrightarrow \text{da qui si vede che } 2^x \text{ è di ordine superiore quindi}$$

il limite sarà $\frac{1}{4}$

3) $\lim\limits_{x\xrightarrow[(-\infty)]{+\infty}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ da ciò abbiamo che se $\lim\limits_{x\longrightarrow x_o} f(x) = +\infty\ (-\infty)$ allora si ha

$\lim\limits_{x\longrightarrow x_o}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$ allora $\lim\limits_{x\longrightarrow x_o}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ infatti, considerando separatamente limite destro e limite sinistro x → 0^+ pongo $y=\frac{1}{x}$ poiché x → 0^+ $\Leftrightarrow$ y → $+\infty$

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = (1+\frac{1}{y})^{y} \xrightarrow[y\to+\infty]{} e$$

ESEMPI:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{3x^2} =$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=1 \quad 3x^2 \longrightarrow +\infty \quad$ f.i.1^{∞}

$$\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}+1-1\right)^{3x^2} = \left[\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2-1}{2}}\right]^{\frac{2}{x^2-1}\cdot 3x^2} = e^{\frac{2}{x^2-1}\cdot 3x^2} = e^6$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{4x^2+5x^3}}$ per il teorema della permanenza del segno l'esponente tende a $+\infty$ e la base tende a 1 → f.i.1^{∞} N.B: attenzione a non confondere x → 0 con x → $+\infty$ poiché non sono infiniti di grado superiore o inferiore.

$$(1+x^2)^{\frac{1}{4x^2+5x^3}} \left[\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}\right]^{x^2\cdot\frac{1}{4x^2+5x^3}} = e^{\frac{1}{4}}$$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(2x)}{\ln x}\right)^{\ln x} \longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(2x)}{\ln x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln 2+\ln x}{\ln x}=1 \qquad$ f.i. 1^{∞}

$$\left(\frac{\ln 2+\ln x}{\ln x}\right)^{\ln x} = \left[\left(1+\frac{\ln 2}{\ln x}\right)^{\frac{\ln x}{\ln 2}}\right]^{\frac{\ln 2}{\ln x}\cdot\ln x} = e^{\ln 2} = 2$$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+1}-x\right)^{\ln\frac{x}{x^2+1}} \quad \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+1}-x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x+1-x^2}{\sqrt{x^2+4x+1}+x} = \frac{4}{2} = 2$

raccogliendo la x si ha che $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

4) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha}\cdot\ln x = 0 \quad x,\alpha\in R^+$ quindi ha senso calcolare solo x → 0^+ poiche 0 è punto di accumulazione di x^{α} · ln x solo da destra.

$$x^{\alpha}\cdot\ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x^{\alpha}}} \text{ pongo } x=\frac{1}{y} \quad x\longrightarrow 0^+ \Leftrightarrow y\longrightarrow+\infty \qquad \frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha}} = \frac{\ln\frac{1}{y}}{y^{\alpha}} = \frac{-\ln y}{y^{\alpha}} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0$$

5) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x \quad x^x\in R^+ \quad$ f.i.$0^0 \qquad x^x = e^{\ln x^x} = e^{x\cdot\ln x} = e^0 = 1$

6) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\log_a(1+x)}{x}$ $a>0$ e $a\neq 1$ $\lim_{x\to 0^+} \log_a(1+x)=0$ $\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{x}\cdot\log_a(1+x)$

$\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e$ poichè $\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ caso particolare a = e

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log_a(1+x)}{x}=1$

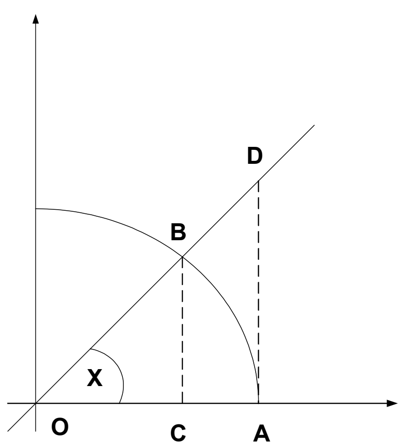
7) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$ $a\in R^+$ a = 1 $a^0-1=0$ $\frac{a^x-1}{x}=0$ per a = 1 considero x → 0^+ e a > 1 (analogamente si può studiare x → 0^- e 0< a <1) Pongo $y=\frac{1}{a^x-1}$ $x\to 0^+$ $y\to+\infty$ $\lim_{x\to 0} a^x=a^0=1$ $\lim_{x\to 0}(a^x-1)=0$ $a^x>1$ per $x>0$

$a^x=1+\frac{1}{y}$ $x=\log_a\left(1+\frac{1}{y}\right)\Rightarrow\frac{a^x-1}{x}=\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{\log_a\left(1+\frac{1}{y}\right)}=\frac{1}{\log_a\left(1+\frac{1}{y}\right)^y}$

$\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y=e\Rightarrow\lim_{y\to+\infty}\log_a\left(1+\frac{1}{y}\right)^y=\log_a e$ quindi avremo per il teorema sul reciproco $\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\log_a\left(1+\frac{1}{y}\right)^y}=\frac{1}{\log_a e}=\log_e a=\ln a=\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$ ∀ a > 0 per a = e

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ poiché $\ln e=1$

8) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ con x misurato in radiante $\lim_{x\to 0}\sin x=0$ f.i. $\frac{0}{0}$ per trovareil valore del limite utilizzo il teorema di confronto e la considero solo a destra poiché la funzione $\frac{\sin x}{x}$ è pari, siccome è il quoziente di 2 funzioni dispari, allora $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}$ considero $x\to 0^+$, posso limitarmi a studiare $0<x<\frac{\pi}{4}$ (l'importante è che sia nel primo quadrante).



Considero ora il cerchi trigonometrico. BC = sin x; AB = x; AD = ? I triangoli OBC e OBA sono simili, allora possiamo scrivere: BC : OC = AD : OA da qui ricavo $AD=\frac{BC}{OC}=\frac{\text{sen } x}{\cos x}=\tan x$ essendo OA = 1 BD < AB < AD ossia sin x < x < tan x $\sin x<x<\frac{\sin x}{\cos x}$ divido per sin x (poiché sin x > 0 siamo nel primo quadrante) e otttengo $1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\xrightarrow{x\to 0}1$ quindi per il teorema dei 2 carabinieri $\exists\ \mathrm{lin}_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$ da qui per il teorema sul reciproco posso concludere $\exists\ \mathrm{lin}_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

9) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$ f.i. $\frac{0}{0}$ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = 1$

10) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ f.i. $\frac{0}{0}$.

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{(1 - \cos x) \cdot (1 + \cos x)}{x^2 + x^2 \cdot \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 \cdot (1 + \cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2}$$

ESERCIZI

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{\sin^2 x} =$ f.i. $\frac{0}{0}$ $\frac{\sin x^2}{\sin^2 x} = \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin x^2}{x^2} = 1$ se si considerava $t = x^2$ avrei avuto che: $\frac{\sin t}{t} = 1$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x}{2x} =$ f.i. $\frac{0}{0}$ $\frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{x \to 0} 1$ $\frac{1 - \cos x}{x^2} \to \frac{1}{2}$

$$\frac{e^x - \cos x}{2x} = \frac{e^x - 1 + 1 - \cos x}{2x} = \frac{e^x - 1}{2x} + \frac{1 - \cos x}{2x} = \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

c) $\lim_{x \to 1} \frac{2^x - 2}{x - 1} =$ $\lim_{x \to 1} 2^x = 2$ f.i. $\frac{0}{0}$ $\lim_{t \to 0} \frac{2^t - 1}{t} = \ln 2$ $2^x - 2 = 2 \cdot (2^{x-1} - 1)$

$t = x - 1$ $x \to 1 = t \to 0$ $\lim_{t \to 0} \frac{2 \cdot (2^t - 1)}{t} = 2 \cdot \ln 2 = \ln 4$

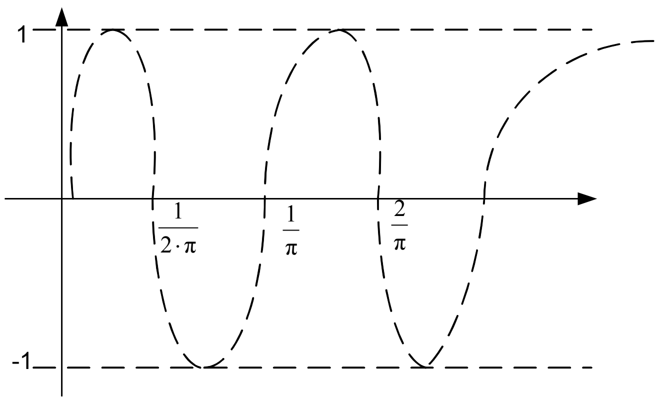
d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{x} =$ f.i. $\frac{\infty}{\infty}$ $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} \right) = +\infty$ poiché e^x è di ordine superiore a x

$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 0$ poiché $\frac{\sin x}{x} = \sin x \cdot \frac{1}{x}$

e) $\lim_{x \to +\infty} x \cdot \sin \frac{1}{x} =$ f.i. $\infty \cdot 0$ $\sin \frac{1}{x} \xrightarrow{x \to +\infty} 0$ per comodità cambio forma indeterminata $x \cdot \sin \frac{1}{x} = \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$ f.i. $\frac{0}{0}$ $t = \frac{1}{x}$ essendo $x \to +\infty$ = $t \to 0$

$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

Grafici Qualitativi



A. $f(x) = \sin\frac{1}{x}$

Per disegnare la funzione mi procuro i seguenti dati:

1. Cerco i dati dove f(x) = 0 sioè dove .

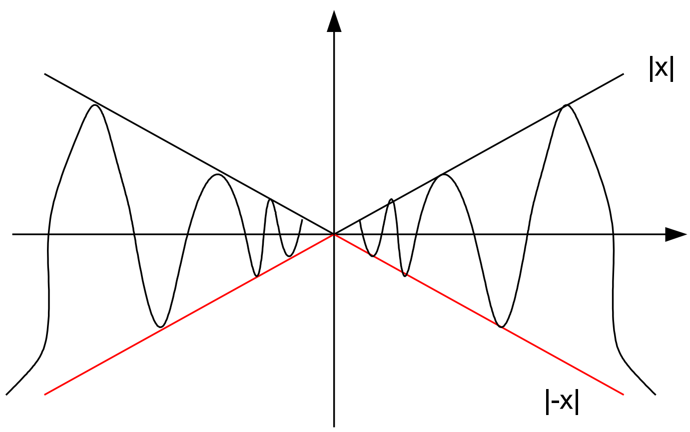
$$\sin\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} = k\pi \quad \forall k \in Z - \{0\}$$

$$x = \frac{1}{k\pi} \qquad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm n$$

$$x = \pm\frac{1}{1\pi}, \pm\frac{1}{2\pi}, \dots, \pm\frac{1}{n\pi} \longrightarrow 0$$

2. Cerco i punti dove f(x) = 1 cioè $\sin\frac{1}{x} = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \forall k \in Z$ $\qquad x = \frac{2}{\pi + 4k\pi} \quad k \in Z$

$$x = \frac{2}{\pi}, \frac{2}{5\pi}, \frac{2}{9\pi}, \dots \longrightarrow 0 \qquad \lim_{x \longrightarrow +\infty} \sin\frac{1}{x} = 0$$



B. $f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x}$

g(x) = 0 per $x = \frac{1}{k\pi} \forall k \in Z - \{0\}$ g(x) = x $\forall x = \frac{2}{\pi + 4k\pi}$

-x ≤ g(x) ≤ +x |g(x)| ≤ |x| Ne consegue che la nostra funzione oscilla tra |x| e |-x|

$$\lim_{x \longrightarrow 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0$$

11) $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \qquad \alpha \in R \qquad \lim_{x \longrightarrow 0} (1+x)^\alpha = 1^\alpha = 1 \qquad$ f.i. $\frac{0}{0} \qquad (1+x)^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln(1+x)}$

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \frac{e^{\alpha\cdot\ln(1+x)} - 1}{x} \qquad \lim_{x \longrightarrow 0} \alpha \cdot \ln(1+x) = 0 \qquad t = \alpha \cdot \ln(1+x) \qquad \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$

$$\frac{e^{\alpha\cdot\ln(1+x)} - 1}{\alpha \cdot \ln(1+x)} \cdot \frac{\alpha \cdot \ln(1+x)}{x} = 1 \cdot \alpha \longrightarrow \alpha$$

Casi Particolari:

- $\alpha = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sqrt{(1+x)} - 1}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1 + x - 1}{x \cdot \left(\sqrt{(1+x)} + 1\right)} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{(1+x)} + 1} = \frac{1}{2}$
- $\alpha = -1 \qquad \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{-x}{1+x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{-1}{1+x} = -1$

Infinitesimi e loro confronto

Se $\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = 0$ allora la diremo INFINITESIMA.

Se $\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} g(x) = 0$ allora poniamo le seguenti definizioni:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} l \in R - \{0\} & \text{f e g sono dello stesso ordine} \\ 0 & \text{f si dice di ordine superiore a g o g di ordine inferiore a f} \\ \pm\infty & \text{g si dice di ordine superiore a f o f di ordine inferiore a g} \\ \nexists & \text{f e g non sono confrontabili} \end{cases}$$

$\sin x$ e x hanno lo stesso ordine $1 - \cos x$ e x^2 hanno lo stesso ordine

$\sin^2 x$ è di ordine superiore a x

Se $f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x} \xrightarrow{x \to 0} 0$ e $g(x) = x$ $\frac{f(x)}{g(x)} = \sin\frac{1}{x}$ $\nexists \lim_{x \longrightarrow 0} \sin\frac{1}{x}$ equivale a $\nexists \lim_{x \longrightarrow \pm\infty} \sin x$

Negli infinitesimi contano gli insiemi di ordine più bassi

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f_1(x) + g_1(x)}{f_2(x) + g_2(x)} \quad \text{con} \quad \lim_{x \longrightarrow x_0} f_i(x) = \lim_{x \longrightarrow x_0} g_i(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f_i(x)}{g_i(x)} = 0 \qquad i = 1, 2$$

in tal caso si ha $\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f_1(x) + g_1(x)}{f_2(x) + g_2(x)} = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \cdot \frac{\frac{f_1(x)}{g_1(x)} + 1}{\frac{f_2(x)}{g_2(x)} + 1}$

Possiamo enunciare il seguente principio di "<u>Sostituzione degli infinitesimi</u>". Nello studio di quozienti di infinitesimi si possono eliminare a numeratore e/o denominatore separatamente quegli infinitesimi di ordine superiore rispetto ai rimanenti.

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{2 \cdot x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{(e^x - 1) + (1 - \cos x)}{2 \cdot \cos x} \qquad \frac{e^x - 1}{x} \longrightarrow 1 \qquad \frac{1 - \cos x}{x^2} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

Studio e^x come infinitesimo

$\lim_{x \longrightarrow -\infty} e^x = 0$ per ricondurmi ad una f.i. cerco la funzione che ha $x \to x_o$ $x_o \to -\infty = 0$ cioè

$\frac{1}{x^\alpha}$ o meglio $\frac{1}{|x|^\alpha}$ con $\alpha \in R^+$ $\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{e^x}{\left(\frac{1}{|x|}\right)^\alpha} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} |x|^\alpha \cdot e^x = 0 \qquad \forall \alpha > 0$

pongo $x = -y$ $x \longrightarrow -\infty \Leftrightarrow y \longrightarrow +\infty$ $|x|^\alpha \cdot e^x = \frac{|x|^\alpha}{e^{-x}} = \frac{|-y|^\alpha}{e^y} = \frac{y^\alpha}{e^y} \xrightarrow{y \to +\infty} 0$

CONTINUITÀ:
Data f: A→ R, preso $x_0 \in A$ con x_0 acc.A, f si dice continua in x_o se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ con la sostituzione $x - x_o = h$, la definizione di continuità diventa: $\lim_{x \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$
Si ha continuità a destra (o a sinistra) in $x_o \Leftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0^+ (x_0^-)} f(x) = f(x_0)$
Quindi la funzione sarà totalmente continua in x_o se e solo se la funzione è continua in x_o sia da destra che da sinistra.

Esempio:
$f(x) = [x]$ con $x_0 = n$ avremo che:
$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$

Se f non è continua in $x_0 \in A$ allora si dice discontinua. Esistono vari tipi di discontinuità:
1. Discontinuità di prima specie:
   - ✓ A salto: $\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ ed $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) \in R$, ma diversi tra loro;
   - ✓ Diversi da $f(x_o)$;
2. Discontinuità di seconda specie, se $\nexists$ o non è finito il limite destro o quello sinistro o entrambi;

Se f è costante in x_o, allora per i teoremi sui limiti, si hanno le seguenti proprietà:
a) f è localmente limitata in x_o;
b) Se $f(x) \neq 0$ allora $\exists \bar{r} > 0 : f(x) \cdot f(x_0) > 0, \forall x \in]x_0 - \bar{r}, x_0 + \bar{r}[\cap A$ (permanenza del segno);
c) | f | è continua in x_o;
d) Se $f(x_o) \neq 0$ allora $\frac{1}{f}$ è continua in x_o;

Se f e g sono continue nello stesso punti x_o, allora:
e) $f + g$ e $f \cdot g$ sono continue in x_o;
f) Se $f(x_o) \neq 0$ allora $\frac{g}{f}$ è continua in x_o;

NB: la somma di due funzioni può essere continua senza che lo siano gli addendi, come ad esempio: $[x]\sqrt{x - [x]}$ in questo caso le due discontinuità si compensano.

Teorema:
Se f è continua in x_o e g è continua in $y_o = f(x_o)$ allora $\underbrace{g \circ f}_{\text{f composto g}}$ è continua in x_o.

Funzioni continue fondamentali: (in tutti i punti del loro dominio)
1) $f(x) = x^n, \forall n \in N$ f continua in $x_o \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n$ ($\Rightarrow$i polinomi e i quozienti di polinomi sono funzioni continue);
2) $f(x) = e^x$, f continua in $x_o \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} e^x =, e^{x_0}$;
3) f (x) = ln x;
4) $f(x) = x^\alpha, \alpha \in R, Df = R^+$ scrivendo il valore di α con base e si avrà: $x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x}$ f è continua in quanto composizione di funzioni continue;
5) $f(x) = a^x, a \in R^+$ f è continua e composta poiché $a^x = e^{x \cdot \ln a}$;

6) $f(x) = \sin x$ è composta poiché $\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$;

7) $f(x) = \cos x$ è composta poiché $\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$;

Esercizi:

1) $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ Ci chiediamo se è continua nel dominio (Df);

$x \cdot \sin \frac{1}{x}$ esiste $\forall x \neq 0$ e $Df = R$ $\forall x_0 \in R - \{0\}$ vicino a x_o, abbiamo che f(x) coincide con: $x \cdot \sin \frac{1}{x}$, che è continua in tutti i punti in cui è definita perché:

- ✓ $\sin \frac{1}{x}$ è continua poiché è una funzione composta da funzioni continue;
- ✓ $x \cdot \sin \frac{1}{x}$ è continua perché è il prodotto di funzioni continue

La continuità in $x_o = 0$

$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ cioè $\lim_{x \to 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$ ciò è vero poiché $\sin \frac{1}{x}$ è limitata e x tende a 0.

2) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ $Df = R$ le funzioni $x + 1$ e x^2 sono continue.

Verifico ora la continuità di f in $x_o = 0$; $f(0) = 1$ è necessario considerare limite destro e limite sinistro. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x+1) = 1 = f(0)$ f è continua a destra di $x_o = 0$, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 = 0 \neq f(0)$ f non è continua a sinistra di $x_o = 0$;

Proprietà delle funzioni continue in intervalli del tipo [a,b]

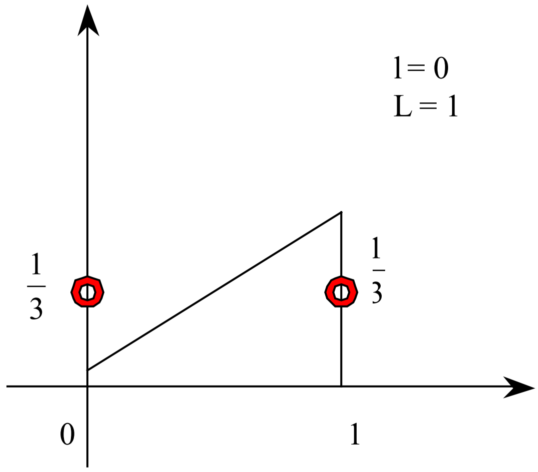
Considero f: [a,b] → R che sia continua in ogni punto dell'intervallo [a,b], allora valgono le seguenti proprietà:

- ✓ f è limitata cioè $l = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$ e $L = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$ si ha che $l, L \in R$ (la continuità in [a,b] è CS per la limitatezza);
- ✓ l, L sono valori assunti da f (x), cioè f ha massimo e minimo assoluti, cioè $\exists x_1, x_2 \in [a,b]: f(x_1) = l$ e $f(x_2) = L$ x_1 è detto punto di minimo assoluto, x_2 è detto punto di massimo assoluto;

Proprietà

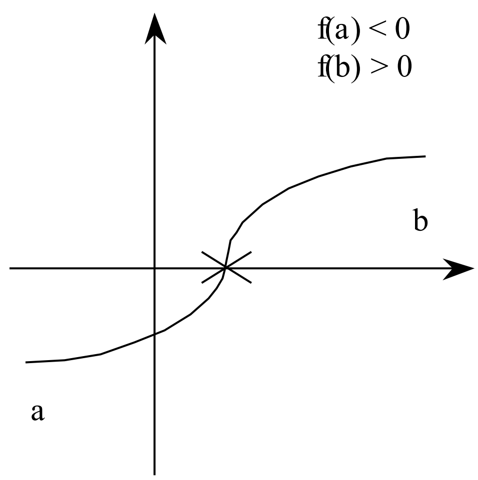
1. Se f è continua in [a,b], $\Rightarrow$ f limitata in [a,b]
   Esempi: f(x) = x per x $\in$ [0, +∞[è continua ma non limitata;
   f(x) = $\frac{1}{x}$ in]0, 1] è continua, ma non limitata;

2. Teorema di Weierstrass:
   Se f è continua in [a,b] allora ha massimo e minimo in [a,b].
   Esempio: f limitata in [a,b] ma non continua in tutto [a,b]
   $$f(x)\begin{cases} x & \text{se } x \in \left]0,1\right[\text{ cioè } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{3} & \text{se } x = 0 \quad \text{o} \quad x = 1 \end{cases}$$



$\nexists x \in [0,1] : f(x) = 0$ o $f(x) = 1$ poiché f non è continua ne in $x_o = 0$ ne in $x_o = 1$

3. Teorema degli zeri di una funzione continua
   Se f è continua in [a,b] e f(a) · f(b) < 0 (assumono valori di segno opposto agli estremi) allora $\exists x_0 \in \left]a,b\right[: f(x) = 0$



N.B.: non c'è una sola soluzione, se ce ne sono più di una sicuramente sono in numero dispari.

Se devo risolvere un'equazione di tipo f(x) = 0 con f continua nel suo dominio ossia cerco soluzioni appropriate, cioè cerco a, b : f(a) $\cdot$ f(b) < 0 allora $\exists x_0 \in]a,b[$ soluzione dell'equazione.
Analogo discorso per l'equazione del tipo f(x) = k ($\Leftrightarrow$ f(x) – k = 0)

4. <u>Teorema dei valori intermedi</u>
   Se f è continua in [a,b] allora presi y_1 e $y_2 \in Cf$ con $y_1 < y_2$, cioè sono diversi, allora $\forall y \in:]y_1, y_2[, \exists x \in [a,b]. f(x) = y$ Se una funzione continua assume 2 valori allora assume anche tutti i valori intermedi, o anche se y_1 e $y_2 \in Cf \Rightarrow [y_1, y_2] \subseteq Cf$

5. <u>Se f è continua in [a,b] chi è Cf?</u>
   Per il teorema di Weierstrass si ha che l = m (minimo) e L = M (massimo), allora per il teorema dei valori intermedi $[m, M] \subseteq Cf$ per il significato di m, M si ha che $Cf \equiv [m, M]$
   Ossia le funzioni continue trasformano intervalli chiusi in intervalli aperti.

6. <u>Teorema di continuità della funzione inversa</u>
   Data f: [a,b] → R ed è continua e monotona crescente o decrescente in [a,b] allora $\exists f^{-1} : [m, M] \longrightarrow [a, b]$ continua.

Fine Funzioni Continue

CALCOLO DIFFERENZIALE

DERIVATE E DERIVABILITÀ

Considero f: A → R con A = Df e i domini potranno essere:

- Intervalli;
- Semirette;
- Unioni di intervalli e semirette;
- Tutto R;

Preso un punto x_o del dominio della funzione ($x_o \in A$), considero $h \in R-\{0\}$, tale che $x_o + h \in A$ (h si dice incremento e $x_o + h$ si dice punto di incremento rispetto a x_o).

Chiamiamo rapporto incrementale della funzione f nel punto x_o

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \left(\frac{\text{incremento variabile dipendente}}{\text{incremento variabile indipendente}}\right)$$

f si dice derivabile in x_o se $\exists \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \in R$ (cioè il limite deve essere finito) Il valore del limite si dice ***DERIVATA*** di f nel punto x_o e si indica con:

- $f^1(x_o)$;
- $D\, f(x_o)$;
- $\frac{df}{dx}(x_0)$

Con il cambio di variabile $x_o + h = x$ si ha la definizione equivalente $\exists \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0} \in R$ f si dice derivabile a destra (e a sinistra) in x_o se $\exists \lim_{h \longrightarrow 0^+ (0^-)} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \in R$ tale valorosi indica con

$f_+^1(x_0)$ o $f_d^1(x_0)$ $[f_-^1(x_0)$ o $f_s^1(x_0)]$

Per i teoremi sui limiti si ha che f è derivabile in $x_o \Leftrightarrow$ f derivabile a destra e a sinistra di x_o e devono essere uguali, cioè $f_+^1(x_0) = f_-^1(x_0)$

<u>Esempi</u>:

1) $f(x) = |x| \qquad x_0 = 0$ studio la derivabilità a destra $\lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{|h|}{|h|} = 1 = f_+^1(0)$

poi studio la derivabilità a sinistra $\lim_{h \longrightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = -1 = f_-^1(0)$

2) f è derivabile a destra e a sinistra di x_o = 0, ma non derivabile nel punto stesso.

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

derivabilità in x_o = 0. Il rapporto incrementale di f in x_o = 0 è

$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{h \cdot \sin\frac{1}{h} - 0}{h} = \sin\frac{1}{h}$ dovendo sostituire $\lim_{h \longrightarrow 0} \sin\frac{1}{h}$ ma esso $\nexists$, come precedentemente visto, cioè f non è derivabile ne a destra ne a sinistra di x_o = 0.

Teorema: se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0.
Dimostrazione: f continua in x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim_{h \longrightarrow 0} f(x_0+h) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{h \longrightarrow 0} [f(x_0+h) - f(x_0)] = 0$ ma:
$f(x_0+h) - f(x_0) \underset{\forall h \neq 0}{=} \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{f(x_0)} \cdot \overset{\overset{0}{\uparrow}}{h}$ per il teorema sul prodotto si ha la tesi, cioè $\lim_{h \longrightarrow 0} [f(x_0+h) - f(x_0)] = 0$

Osservazioni: derivabilità in x_0 $\Rightarrow$ continuità in x_0, non è vero il contrario, cioè ci sono funzioni continue in x_0, ma non derivabili in esso, come ad esempio f(x) = |x|. La continuità in x_0 è CN, ma non CS per la derivabilità.

Regole di Derivabilità

a) Se f e g sono derivabili in x_0 allora:
   - f + g è derivabile in x_0 e $D(f + g)(x_0) = f^1(x_0) + g^1(x_0)$;
   - $f \cdot g$ è derivabile in x_0 e $D(f \cdot g)(x_0) = f^1(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g^1(x_0)$;

   SOMMA: il rapporto incrementale della somma è:

   $$\frac{[f(x_0+h)+g(x_0+h)]-[f(x_0)+g(x_0)]}{h} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

   da qui si passa al $\lim_{h \longrightarrow 0} (f+g)(x_0) = f^1(x_0) + g^1(x_0)$

   PRODOTTO: il rapporto incrementale del prodotto è:

   $$\frac{[f(x_0+h)\cdot g(x_0+h)]-[f(x_0)\cdot g(x_0)]}{h} =$$

   $$= \frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g(x_0+h) + f(x_0)\cdot g(x_0+h) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{h}$$

   cioè ho aggiunto e tolto la stessa quantità $f(x_0)\cdot g(x_0+h)$.

   $$\underbrace{g(x_0+h)}_{g(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{f^1(x_0)} + f(x_0) \cdot \underbrace{\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}_{g^1(x_0)} \xrightarrow{h \to 0} f^1(x_0)\cdot g(x_0) + g^1(x_0)\cdot f(x_0)$$

   Per Hp i teoremi su somma e prodotto sono finiti e derivabilità implica continuità.

b) Se f è derivabile in x_0 e $f(x) \neq 0$ allora $\frac{1}{f}$ è derivabile in x_0 e $D\left(\frac{1}{f}\right)(x_0) = \frac{f^1(x_0)}{f^2(x_0)}$

   Il Rapporto incrementale a $\frac{1}{f}$ in x_0 è:

   $$\frac{\frac{1}{f(x_0+h)} - \frac{1}{f(x_0)}}{h} = \frac{\frac{-f(x_0+h)+f(x_0)}{f(x_0+h)\cdot f(x_0)}}{h} = -\underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{f^1(x)} \cdot \frac{1}{\underbrace{f(x_0+h)}_{f(x_0)} \cdot f(x_0)} \longrightarrow \frac{f^1(x_0)}{f^2(x_0)}$$

   N.B: $f(x_0+h) \neq 0$ $\quad f(x_0) \neq 0$ è molto importante, ne consegue che per intervalli molto piccoli $\exists f(x_0+h) \neq 0$ poiché f(x) è diversa da 0 in tutto l'intorno di x_0.

c) Se f e g sono divisibili in x_o e $f(x_o) \neq 0$ allora $\frac{g}{f}$ è derivabile in x_o e $D\left(\frac{g}{f}\right)(x_0) = \frac{g^1(x_0) \cdot f(x_0) - f^1(x_0) \cdot g(x_0)}{f^2(x_0)}$