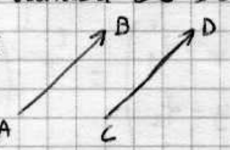
Geometria B

IL PIANO EUCLIDEO REALE $E_2 = E_2(R)$

definizione a pagina 145

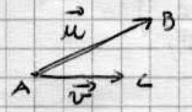
VETTORE LIBERO = l'insieme finito di tutti i segmenti orientati che hanno la stessa lunghezza, stessa direzione e stesso verso, cioè



$\vec{u} = \vec{AB} = \vec{CD}$

Sia $\vec{E}_2$ lo spazio vettoriale fornito dai vettori liberi nel campo R

La dimensione di $\vec{E}_2$ è 2, cioè se prendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$, questa è una base per $\vec{E}_2$

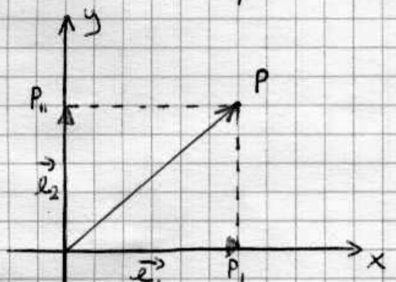


Riferimento cartesiano nel piano $E_2 = E_2(R)$

In $\vec{E}_2$ sia fissato un prodotto scalare. Sia $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ una base ortonormale di $\vec{E}_2$, cioè $e_1 \cdot e_2 = 0$ $\quad |e_1| = |e_2| = 1$

prodotto scalare $\qquad$ norma del vettore

Sia O un punto arbitrario del piano $\vec{E}_2$



Si dice riferimento cartesiano la coppia $R = (O, (e_1, e_2))$

dove O sarà l'origine di riferimento

$\vec{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ dove $(x, y) \in R^2$ $\qquad R^2 = R \times R$

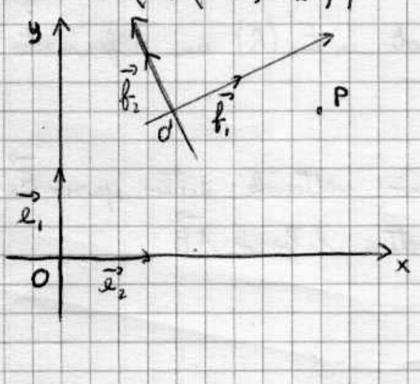
L'applicazione $f_R : E_2 \longrightarrow R^2$ $\quad$ è biunivoca ed è detta sistema di coordinate

$P \longrightarrow f_R(P) = (x, y)$ $\quad$ cartesiane associate al riferimento fissato

$\vec{OP}_1 = x\vec{e}_1 \qquad \vec{OP}_{11} = y \cdot \vec{e}_2 \qquad \vec{OP} = \vec{OP}_1 + \vec{P_1P} = \vec{OP}_1 + \vec{OP}_{11}$

$\Rightarrow (x, y)$ è la coppia delle coordinate cartesiane di P $\Rightarrow$ l'origine è il punto del piano che ha le coordinate x ed y nulle $\Rightarrow P \equiv (x, y)$

Sia $R(O, (\vec{e}_1, \vec{e}_2))$ e sia $R' = (O', (\vec{f}_1, \vec{f}_2))$



$P_R \equiv (x, y) \qquad \vec{f}_1 = a_1^1 \vec{e}_1 + a_1^2 \vec{e}_2$

$P_{R'} \equiv (x', y') \qquad \vec{f}_2 = a_2^1 \vec{e}_1 + a_2^2 \vec{e}_2$

$$\Rightarrow (\vec{f}_1, \vec{f}_2) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2) \cdot \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}$ matrice del cambiamento di base, è una matrice ORTOGONALE cioè $A\cdot {}^tA = I_2$ $\qquad A \in O(2,R)$

Se conosciamo la matrice A del cambiamento di base e conosciamo le coordinate cartesiane del punto O' rispetto al riferimento R, $O'_R \equiv (\alpha_1, \alpha_2)$, cioè $\vec{OO'} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2$, allora:

TEOREMA: se (x,y) [rispettivamente (x',y')] sono le coordinate di P rispetto a R [rispettivamente R'] allora si ha che:

$$\begin{cases} x = a^1_1 x' + a^1_2 y' + \alpha_1 \\ y = a^2_1 x' + a^2_2 y' + \alpha_2 \end{cases} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x - \alpha_1 \\ y - \alpha_2 \end{pmatrix} = {}^tA \begin{pmatrix} x - \alpha_1 \\ y - \alpha_2 \end{pmatrix}$$

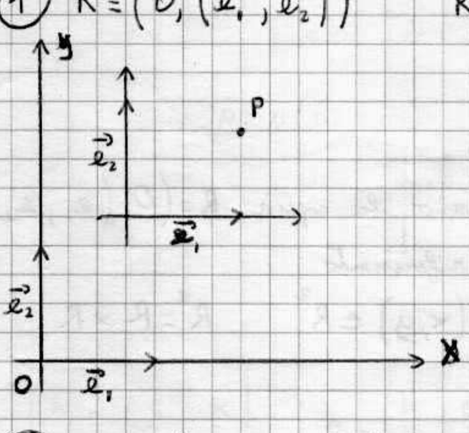
DIMOSTRAZIONE: $\vec{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = \vec{OO'} + \vec{O'P} = (\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2) + (x' \vec{f}_1 + y' \vec{f}_2) =$

$$= (\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2) + x'(a^1_1 \vec{e}_1 + a^2_1 \vec{e}_2) + y'(a^1_2 \vec{e}_1 + a^2_2 \vec{e}_2) =$$

$$= \underbrace{(a^1_1 x' + a^1_2 y' + \alpha_1)}_{x} \vec{e}_1 + \underbrace{(a^2_1 x' + a^2_2 y' + \alpha_2)}_{y} \vec{e}_2$$

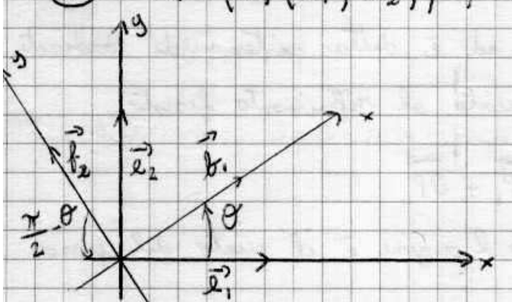
Casi particolari

1° $R = (O, (\vec{e}_1, \vec{e}_2))$ $\qquad R'(O', (\vec{e}_1, \vec{e}_2))$ $\qquad$ stessa base



$A = I_2$ $\qquad \begin{cases} x = x' + \alpha_1 \\ y = y' + \alpha_2 \end{cases}$

2° $R = (O, (\vec{e}_1, \vec{e}_2))$, $\quad R'(O, (\vec{f}_1, \vec{f}_2))$ $\qquad$ stessa origine



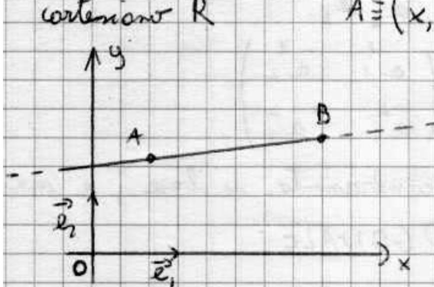
$$\begin{cases} x = a^1_1 x' + a^1_2 y' \\ y = a^2_1 x' + a^2_2 y' \end{cases}$$

$\vec{f}_1 = \cos\theta \cdot \vec{e}_1 + \operatorname{sen}\theta\, \vec{e}_2$

$\vec{f}_2 = -\operatorname{sen}\theta \cdot \vec{e}_1 + \cos\theta\, \vec{e}_2$ $\quad \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Rette nel piano euclideo

Siano A e B due punti distinti del piano $E_2(R)$. Fissato in $E_2(R)$ un riferimento cartesiano R $\qquad A \equiv (x,y)$, $B \equiv (x',y')$



Indichiamo con $\vec{r}$ il sottospazio vettoriale dello spazio $\vec{E}_2$ di dimensione 1 generato dal vettore libero $\vec{AB}$

$\vec{r} = L(\vec{AB})$

Un qualunque punto $P \in R$ deve soddisfare la condizione $\vec{AP} = \lambda \vec{AB}$, $\lambda \in R$, tale condizione è detta equazione vettoriale della retta $\vec{AB}$

Preso il vettore $\vec{AB}$ troviamo le sue componenti rispetto alla base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

$$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (x_1 \vec{e}_1 + y_1 \vec{e}_2) - (x_0 \vec{e}_1 + y_0 \vec{e}_2) = (x_1 - x_0)\vec{e}_1 + (y_1 - y_0)\vec{e}_2$$

$\Rightarrow$ le componenti del vettore $\vec{AB}$ sono le differenze delle coordinate di B da quelle di A

Se $P \in R$ ha generiche coordinate $(x,y) \Rightarrow$

$AP = (x - x_0)\vec{e}_1 + (y - y_0)\vec{e}_2$ $\Rightarrow$ dall'equazione vettoriale si ha che:

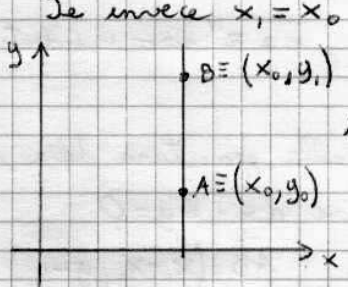
$(x - x_0) = \lambda(x_1 - x_0)$ e $(y - y_0) = \lambda(y_1 - y_0)$

ESEMPIO: $A \equiv (3,1)$ $B \equiv (4,-2)$ vettore $\vec{AB}$

$$\begin{cases} x = 3 + \lambda(4-3) \\ y = 1 + \lambda(-2-1) \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 - 3\lambda \end{cases} \quad \lambda \in R$$

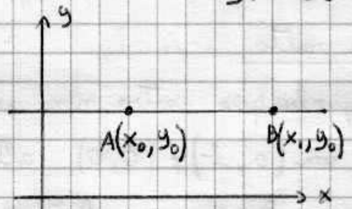
Se $x_1 \neq x_0$ e $y_1 \neq y_0$ $\quad \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0}$ $\Rightarrow$ equazione frazionaria della retta

Se invece $x_1 = x_0$



$r) x = x_0$

Se invece $y_1 = y_0$



$r) y = y_0$

Dall'equazione vettoriale

$\vec{AP} = \lambda \vec{AB}$

poiché una riga è linearmente dipendente dall'altra

$$\vartheta \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \text{per il teorema di Kramer} \Rightarrow \vartheta \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

rango della matrice

Utilizzando La-Place rispetto alla 1^a riga si ottiene $ax + by + c = 0$ con $(a,b) \neq (0,0)$ che è l'equazione cartesiana della retta $\vec{AB}$

ESEMPIO: $A \equiv (3,1)$ $B \equiv (4,-2)$

$$\det \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad x(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + y(-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow 3x + y - 10 = 0$ Se $b \neq 0$ l'equazione diventa $y = mx + n$ dove

$m = -\dfrac{a}{b}$ $\quad n = -\dfrac{c}{b}$ dove $m =$ coefficiente angolare

2 rette nel piano E_2 possono essere:

(1) - Coincidenti;

(2) - Parallele e disgiunte;

(3) - Incidenti

Se la retta $r)\ ax+by+c=0$ con $(a,b)\neq(0,0)$ e $r')\ a'x+b'y+c'=0$ con $(a',b')\neq(0,0)$

allora $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$

1) r e r' sono coincidenti $\vartheta\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 1$

2) r e r' sono parallele e disgiunte se $1 = \vartheta\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \neq \vartheta\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$

3) r e r' sono incidenti se è un sistema di Cramer cioè $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$

ESEMPI:

$r)\ 3x-2y+4=0$ $\quad r')\ -6x+4y-8=0$ $\quad r'')\ -6x+4y-20=0$

$r''')\ 4x-6y+1=0$

r e r' sono coincidenti $\quad$ r e r'' sono parallele e disgiunte $\quad$ r e r''' sono incidenti

Coefficienti direttori di una retta

cioè la sua giacitura

Sono le componenti di un qualunque vettore non nullo appartenente alla giacitura della retta

Se $r)\ ax+by+c=0$ con $(a,b)\neq(0,0)$ allora $\vec{r}$ ha equazione $ax+by=0$

Sia $\vec{u}=\vec{AB}\in\vec{r}$, $A\in r$, $B\in r$ $\quad A\equiv(x_0,y_0)$ $\quad B\equiv(x_1,y_1)$ $\quad \vec{AB}\equiv(x_1-x_0,\ y_1-y_0)$

$B\in r \quad ax_1+by_1+c=0 \quad -$

$A\in r \quad ax_0+by_0+c=0 \quad =$

$$a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)=0 \Rightarrow \vec{r})\ ax+by=0$$

$r)\ ax+bx+c=0 \Rightarrow$ sono coefficienti direttori $(b,-a)$

Se r è in forma parametrica $x = x_0+\lambda\underbrace{(x_1-x_0)}_{l}$

$y = y_0+\lambda\underbrace{(y_1-y_0)}_{m}$ $\quad \lambda\in R \Rightarrow l$ e m sono coefficienti direttori

In forma frazionaria si avrà $\dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m}$

2 rette parallele hanno coefficienti direttori proporzionali

$r)\ ax+by+c=0 \Rightarrow (b-a)$

$r')\ a'x+b'y+c'=0 \Rightarrow (b'-a')$ $\Rightarrow \vartheta\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 1 \neq \vartheta\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0$$

Se $r)\ ax+by+c=0$ $\quad P\equiv(x_0,y_0)\notin r$ e sia $r'//r$ e contenente P

$$r')\ a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$$

$$r')\ \begin{cases} x = x_0 + \lambda(b) \\ y = y_0 + \lambda(-a) \end{cases} \quad \lambda\in R \qquad \frac{x-x_0}{b} = \frac{y-y_0}{-a}$$

Si dicono coseni direttori di una retta i coseni (a meno del segno) degli angoli che il vettore $(b\ -a)$ forma con i versori della base di riferimento

Sia θ l'angolo tra $\vec{u}=(b\ -a)$ ed $\vec{e}_1\equiv(1,0)$ $\qquad \cos\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

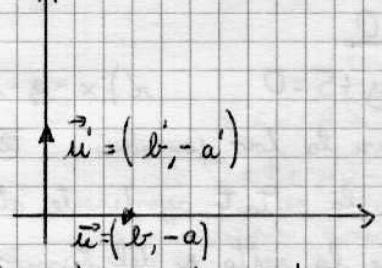
Sia α l'angolo tra $\vec{u}=(b\ -a)$ ed $\vec{e}_2\equiv(0,1)$ $\qquad \cos\alpha = \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Perpendicolarità tra rette nel piano euclideo $E_2(R)$

Date 2 rette r ed r'

$r)\ ax+by+c=0 \qquad (a,b)\neq(0,0)$

$r')\ a'x+b'y+c'=0 \qquad (a',b')\neq(0,0)$



$r\perp r'$ se e solo se $\vec{u}\cdot\vec{u}'=0 \Rightarrow (b,-a)\cdot(b',-a') = bb'+aa'=0$

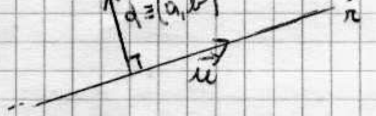
cioè $\vec{u}$ è ortogonale a $\vec{u}'$

In particolare se $b, b'\neq 0$ dividendo per bb' si ha $\frac{aa'}{bb'}+1=0$

$$\left(-\frac{a}{b}\right)\cdot\left(-\frac{a'}{b'}\right)+1=0 \Rightarrow m\cdot m'+1=0 \Rightarrow m' = \frac{1}{m}$$

Se $r)\ ax+by+c=0 \qquad (a,b)\neq(0,0)$

$d\equiv(a,b)$ è sempre ortogonale a $\vec{r}$ (cioè lo spazio dei vettori assegnati alla retta)

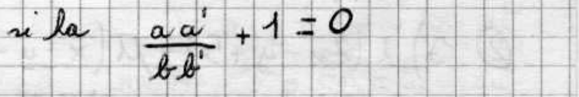


Infatti se $\vec{u}\equiv(x,y)\in\vec{r}$ allora (x,y) deve soddisfare l'equazione omogenea $\vec{r})\ ax+by=0$

$$(a,b)\cdot(x,y)=0 = \vec{d}\cdot\vec{u}=0$$

Se $r)\ ax+by+c=0$ e $P\equiv(x_0,y_0)$

La retta $r'\perp r$ e contenente P in forma parametrica ha equazione



$$r'\ \begin{cases} x = x_0 + \lambda(a) \\ y = y_0 + \lambda(b) \end{cases}$$ in forma cartesiana sarà: $r')\ b(x-x_0)-a(y-y_0)$

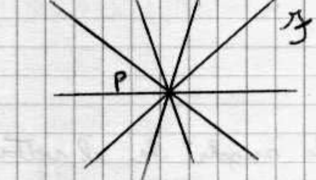
ESEMPIO $\qquad r)\ 2x-3y+1=0 \qquad P\equiv(5,5)$

$r'\perp r$ e contenente P sarà:

$r')\ \begin{cases} x=5+\lambda(2) \\ y=5+\lambda(3) \end{cases}$ ed in forma cartesiana sarà $r')\ -3(x-5)-2(y-5)=0$

FASCI DI RETTE

Si definisce *fascio proprio* di rette l'insieme di tutte le rette che contengono lo stesso punto P detto *centro del fascio*



TEOREMA: se $r)\ ax+by+c=0$ e $r')\ a'x+b'y+c'=0$ sono 2 rette di un fascio proprio, allora tutte e sole le rette individuate dal fascio r, r' hanno equazione del tipo

$$\lambda(ax+by+c)+\mu(a'x+b'y+c')=0 \quad \lambda,\mu\in R \text{ e } (\lambda,\mu)\neq(0,0)$$

Si definisce *fascio improprio* di rette l'insieme delle rette parallele tra di loro

TEOREMA: se $r)\ ax+by+c=0$ è una retta di un fascio improprio, allora tutte e sole le rette del fascio improprio individuato da r hanno equazione del tipo $ax+by+\lambda=0$ con $\lambda\in R$

ESEMPIO

$r)\ 2x-y+5=0 \qquad r')\ x-y-2=0$

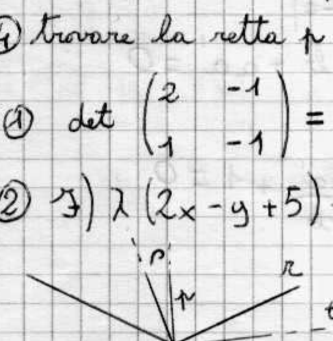
① stabilire la loro posizione ② trovare la retta s appartenente al fascio rr' e contenente $P\equiv(1,2)$

③ trovare la retta t appartenente al fascio e parallela a $t')\ x+3y-6=0$

④ trovare la retta p del fascio $\perp$ alla retta t'

① $\det\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = -2-(-1)=-1 \Rightarrow$ sono incidenti ed individuano un fascio proprio

② $\mathcal{F})\ \lambda(2x-y+5)+\mu(x-y-2)=0 \quad (\lambda,\mu)\neq(0,0)$



Sostituendo ad x e a y le coordinate di P

$\lambda(2-2+5)+\mu(1-2-2)=0 \qquad 5\lambda-3\mu=0$

una soluzione può essere $\lambda=3$ e $\mu=5$

tornando a sostituire ovvio $s)\ 3(2x-y+5)+5(x-y-2)=0$

$s)\ 11x-5y+5=0$

③ $\mathcal{F})\ \lambda(2x-y+5)+\mu(x-y-2)=0 \quad (\lambda,\mu)\neq(0,0)$

$(2\lambda+\mu)x+(-\lambda-\mu)y+5+\lambda-2\mu=0 \qquad t')\ x+3y-6=0$

$\det\begin{pmatrix}2\lambda+\mu & -\lambda-\mu\\ 1 & +3\end{pmatrix}=7\lambda+4\mu=0 \Rightarrow$ una soluzione è $\lambda=4$, $\mu=-7$

$t)\ x+3y+34=0$

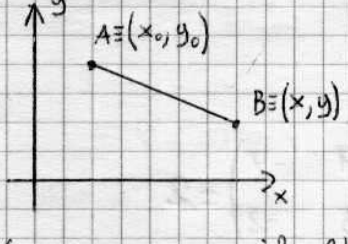
④ $\mathcal{F})\ \lambda(2x-y+5)+\mu(x-y-2)=0 \Rightarrow (2\lambda+\mu)x+(-\lambda-\mu)y+5+\lambda-2\mu=0$

$t')\ x+3y-6 \qquad aa'+bb'=0$

$\Rightarrow (2\lambda+\mu)\cdot1+(-\lambda+\mu)\cdot3=0 \qquad -\lambda\cdot2\mu=0 \qquad \lambda=2 \qquad \mu=1$

$p)\ 3x-y+12=0$

DISTANZA NEL PIANO EUCLIDEO



Distanza tra 2 punti; presi 2 punti $A, B \in E_2(\mathbb{R})$

$d(A,B) = \|\vec{AB}\|$

$d(A,B) = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ essendo $\vec{AB} = (x-x_0, y-y_0)$

Come conseguenza si ha l'equazione cartesiana della circonferenza nel piano, che è il luogo geometrico dei punti del piano che hanno distanza costante uguale a R (raggio della circonferenza) da un punto C (centro della circonferenza)

$P \in E_2 \quad d(P,C) = R \quad R > 0$

Se $P\equiv(x,y) \quad C\equiv(a,b) \quad d^2(P,C) = R^2 \quad (x-a)^2+(y-b)^2 = R^2$

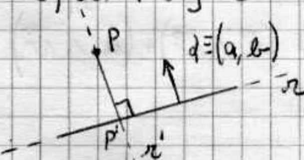
$x^2 - y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R = 0$

$x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma = 0$ dove $\alpha = -2a \quad \beta = -2b \quad \gamma = a^2+b^2-R^2$

$a = -\frac{\alpha}{2} \quad b = \frac{\beta}{2} \quad R = \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma}}{2}$

Distanza tra un punto e una retta

$r)\ ax+by+c=0 \qquad P\equiv(x_0,y_0) \qquad r' \perp r \quad , P\in r' \qquad P'\equiv(x_1,y_1)$ è il piede della perpendicolare



$d(P,r) = d(P,P') = \|PP'\| = \|\lambda\cdot\vec{\alpha}\| = |\lambda|\cdot\|\vec{\alpha}\| = |\lambda|\cdot\sqrt{a^2+b^2}$

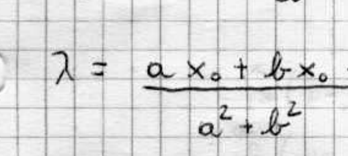
$\begin{cases} x_0-x_1 = \lambda a \\ y_0-y_1 = \lambda b \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = x_0-\lambda a \\ y_1 = y_0-\lambda b \end{cases} \qquad P_1 \in r$

$ax_1+by_1+c=0 \qquad a(x_0+\lambda a)+b(y_0+\lambda b)+c=0$

$ax_0+\lambda a^2+by_0+\lambda b^2+c=0 \qquad \lambda(a^2+b^2)+by_0+ax_0+c=0$

$\lambda = \frac{ax_0+bx_0+c}{a^2+b^2} \qquad d(P,r) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Bisettrici di 2 rette



Le equazioni delle rette bisettrici di 2 rette assegnate r ed r' si ottengono considerando il punto $P\equiv(x,y)$ imponendo che:

$d(P,r) = d(P,r')$

$r)\ ax+by+c=0 \qquad r')\ a'x+b'y+c'=0$

$$\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|a'x+b'y+c'|}{\sqrt{(a')^2+(b')^2}}$$

ESEMPIO $\quad P\equiv(2,-2) \quad Q\equiv(-1,2) \quad r)\ 2x-y-7=0 \quad r')\ -6x+3y-2=0$

① Calcolare la distanza $d(P,Q)$

② Calcolare la distanza $d(P,r)$

③ Calcolare la distanza $d(r,r')$

① $d(P,Q) = \sqrt{(2+1)^2 + (-2-2)^2} = 5$

② $\dfrac{|2\cdot 2 - 1\cdot(-2) - 7|}{\sqrt{2^2+1}} = \dfrac{|-1|}{\sqrt{5}}$

③ $\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & +3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \underset{\text{rango}}{\rho}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} = 1 \qquad \rho\begin{pmatrix} 2 & -1 & -7 \\ -6 & 3 & -2 \end{pmatrix} = 2$

$\Rightarrow$ le rette sono // e disgiunte, quindi prendendo un punto $A \in r$

$A \equiv (3,-1) \quad d(r,r') = d(A,r') = \dfrac{|-6\cdot 3 + 3\cdot(-1) - 2|}{\sqrt{6^2+3^2}} = \dfrac{23}{\sqrt{45}}$

Prodotto vettoriale

V_3 spazio vettoriale con un fissato prodotto scalare

Sia $B = (e_1, e_2, e_3)$ base ortonormale

$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V_3 \qquad \vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3$

$\qquad\qquad\qquad \vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3$

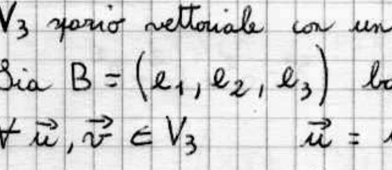
Prodotto vettoriale di vettori u e v il vettore $u \wedge v = \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$

$\lambda: V_3 \times V_3 \to V_3$

$(\vec{u}, \vec{v}) \to \vec{u} \wedge \vec{v}$ antisimmetrica, bilineare $[(\vec{u} + \vec{u}') \wedge \vec{v} = (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u}' \wedge \vec{v})$

CALCOLO DELLE AREE

Dati 3 punti non allineati $A \equiv (x_0, y_0) \quad B \equiv (x_1, y_1) \quad C \equiv (x_2, y_2)$



$\text{Area}(A\hat{B}C) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix}$

$\vec{AB} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0) = (x_1 - x_0)\vec{e}_1 + (y_1 - y_0)\vec{e}_2$

$\vec{AC} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0) = (x_2 - x_0)\vec{e}_1 + (y_2 - y_0)\vec{e}_2$

$\text{Area}(A\hat{B}C) = \dfrac{1}{2}\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|$

$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = (x_1 - x_0)(y_2 - y_0)\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 + (y_1 - y_0)(x_2 - x_0)\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 =$

$= [(x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (y_1 - y_0)(x_2 - x_0)]\,\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$

$\text{Area}(A\hat{B}C) = \dfrac{1}{2}|(x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (y_1 - y_0)(x_2 - x_0)| = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$

ESEMPIO $\quad r)\ 4x+3y=1 \qquad s)\ x-y=2$

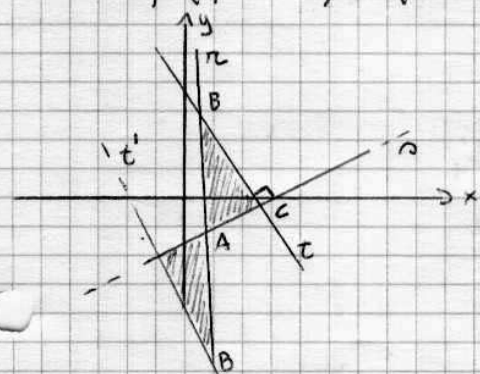
① Trovare la bisettrice di r e s

② Trovare la retta $\perp$ a s che formi con r ed s un triangolo di area $\frac{7}{4}$

① $\dfrac{|4x+3y-1|}{\sqrt{16+9}} = \dfrac{|x-y-2|}{\sqrt{1+1}} \qquad \sqrt{2}\,(4x+3y-1) = \pm 5\,(x-y-2)$

$b')\ (4\sqrt{2}-5)x + (3\sqrt{2}+5)y + 10 - \sqrt{2} = 0$

$b)\ (4\sqrt{2}+5)x + (3\sqrt{2}-5)y - 10 - \sqrt{2} = 0$



$t \perp s \qquad r \cap s = A \equiv (1,-1)$

$t)\ x+y=K$

$t \cap r \begin{cases} x+y=K \\ 4x+3y=1 \end{cases} \qquad B \equiv (1+3K,\ -1+4K)$

$t \cap s \begin{cases} x+y=K \\ x-y=2 \end{cases} \qquad C \equiv \left(1+\frac{K}{2},\ 1+\frac{K}{2}\right)$

$$\text{Area}(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{7}{4} = \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1-3K & -1+4K & 1 \\ 1+\frac{K}{2} & -1+\frac{K}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left|-\frac{3K^2}{2} - 2K^2\right|$$

$t)\ x+y=1 \qquad t_1)\ x+y=-1$

Le isometrie del piano euclideo E_2

Si definisce isometria ogni applicazione $f: E_2 \to E_2$ e deve essere:

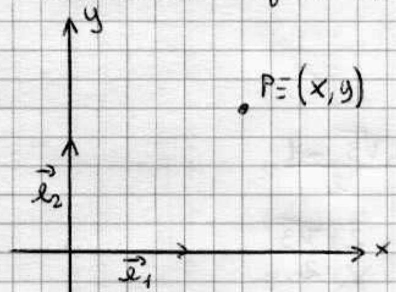
$P \to P' = f(P)$

⊕ Biunivoca

⊕ Conservi la distanza $\forall P, Q \in E_2$

$P' = f(P)$
$Q' = f(Q) \Rightarrow d(P,Q) = d(P',Q')$

Fissato un riferimento cartesiano $\quad P \equiv (x,y) \qquad P' = f(P) \equiv (x',y') \qquad f(P) = P' \equiv (x',y')$



Le equazioni di f $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ ← valori noti

A è ortogonale, $A\cdot{}^tA = I_2$

$f \begin{cases} x' = a^1_1 x + a^1_2 y + b_1 \\ y' = a^2_1 x + a^2_2 y + b_2 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{pmatrix}$

$\det A = \pm 1 <$ $+1$ isometria diretta / -1 isometria inversa

Il caso delle isometrie dirette

$$\begin{cases} A \cdot {}^tA = I_2 \\ \det A = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ a_1^1 a_2^2 - a_2^1 \cdot a_1^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1^1)^2 + (a_2^2)^2 = 1 \\ a_1^1 \cdot a_1^2 + a_2^1 \cdot a_2^2 = 0 \\ a_1^1 \cdot a_1^2 + a_2^1 \cdot a_2^2 = 0 \\ (a_1^1)^2 + (a_2^2)^2 = 1 \\ a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1^1 = a_2^2 \\ a_2^1 = -a_1^2 \\ (a_1^1)^2 + (a_2^2)^2 = 1 \end{cases}$$

$\exists!\, \theta \in \left[0, \frac{2}{\pi}\right[\;/\; a_1^1 = a_2^2 = \cos\theta$ ed inoltre $a_1^2 = -a_2^1 = \operatorname{sen}\theta$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad f \quad \begin{array}{l} x' = x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta + b_1 \\ y' = x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta + b_2 \end{array}$$

Cerchiamo i punti uniti, cioè quelli che rimangono in se stessi

$P \in E_2 \qquad f(P) = P' \qquad P \equiv (x, y) \qquad P' = f(P) \equiv (x, y)$

$$\begin{cases} x = x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta + b_1 \\ y = y\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta + b_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} (\cos\theta - 1)x - y\operatorname{sen}\theta + b_1 = 0 \\ \operatorname{sen}\theta + y(\cos\theta - 1) + b_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \cos\theta - 1 & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta - 1 \end{vmatrix} = 2(1 - \cos\theta)$$

- $\cos\theta \neq 1$ sistema di Kramer con un solo punto fisso C ed f è la rotazione antioraria di centro C e angolo θ
- $\cos\theta = 1 \quad f \begin{cases} x' = x + b_1 \\ y' = y + b_2 \end{cases}$ è una traslazione

TEOREMA: ogni isometria diretta è una rotazione oppure una traslazione

Ripetendo analoghi calcoli nel caso $\det A = -1$

Si hanno le equazioni dell'isometria inversa

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta + b_1 \\ y' = x\operatorname{sen}\theta - y\cos\theta + b_2 \end{cases}$$

ESERCIZIO

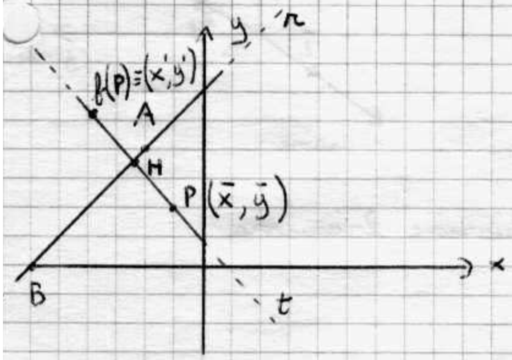
Date le applicazioni:

$$f \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{\sqrt{3}-3}{2} \end{cases} \qquad g \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{2\sqrt{3}-1}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{2+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

1. Stabilire se f e g sono isometrie e precisarne il tipo
2. Stabilire se $g \circ f$ ed $f \circ g$ sono ancora isometrie e precisarne il tipo

ESERCIZIO

Trovare l'equazione della simmetria piana ortogonale alla retta passante per i punti $A \equiv (-1,2)$ $B \equiv (-3,0)$



$$\text{retta } \overline{AB} = r = \det \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Sviluppando i calcoli

$r)\ x - y + 3 = 0$

Prendiamo la retta $t \perp r$ e passante per P

$t)\ 1(x-\bar{x}) + 1(y-\bar{y}) = 0 \qquad t)\ x + y - (\bar{x}+\bar{y}) = 0$

$$\begin{cases} t \\ r \end{cases} \Rightarrow H \equiv (x,y) = \left(\frac{\bar{x}+\bar{y}-3}{2}, \frac{\bar{x}+\bar{y}+3}{2} \right)$$

Siccome H deve essere il punto medio del segmento $\overrightarrow{P f(P)}$ dove $f(P) \equiv (x', y')$ si ha $\frac{\bar{x}+x'}{2} = \frac{\bar{x}+\bar{y}-3}{2}$

$\frac{\bar{y}+\bar{y}+3}{2} = \frac{\bar{y}+y'}{2} \Rightarrow x' = \bar{y}-3 \qquad y' = \bar{x}+3$

isometria inversa

$$\Rightarrow f(P) \equiv (\bar{y}-3, \bar{x}+3) \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

COORDINATE POLARI NEL PIANO E_2

Fissato un punto $O \in E_2$ e un versore $\vec{u} \in \vec{E}_2$ (spazio dei vettori liberi) allora diremo riferimento polare $(O, \vec{u})$ $\quad \forall P \neq O$

$\rho = \|\overrightarrow{OP}\| \qquad P \equiv (\rho, \theta)$

θ = angolo compreso tra $\vec{u}$ e $\overrightarrow{OP}$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Legame tra coordinate cartesiane e coordinate polari

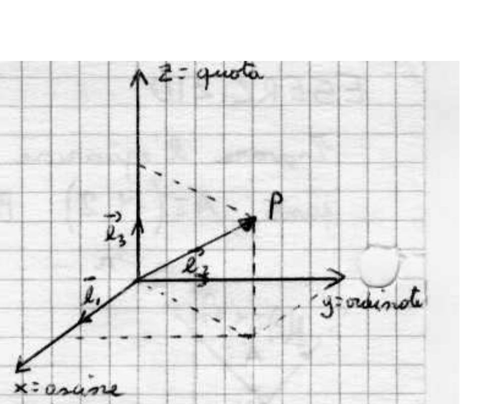
Fissato in E_2 un riferimento cartesiano $R = (O, (\vec{u}, \vec{v}))$, cioè $(\vec{u}, \vec{v})$ è base ortonormale di $\vec{E}_2$

$P_R \equiv (x,y)$ cioè $\overrightarrow{OP} = (x,y)$ rispetto alla base ordinata $(\vec{u}, \vec{v})$

$\rho = \|\overrightarrow{OP}\| = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho \operatorname{sen}\theta$

E_3 SPAZIO EUCLIDEO DI DIMENSIONE 3



$\vec{E}_3$ spazio vettoriale dei vettori liberi con un prodotto scalare

Riferimento cartesiano $R = (O, (e_1, e_2, e_3))$

$O \in E_3$ = origine di riferimento

(e_1, e_2, e_3) vettori tra loro indipendenti

$\forall P \in E_3 \qquad \vec{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$

Si dice sistema di coordinate cartesiane di E_3 l'applicazione biunivoca

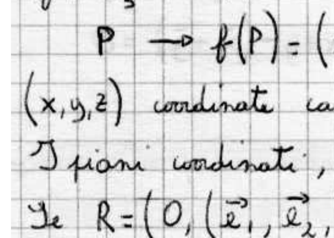
$f: E_3 \to R^3$

$\quad P \to f(P) = (x, y, z)$

(x, y, z) coordinate cartesiane di P rispetto al riferimento R, cioè $P_R = (x, y, z)$

I piani coordinati, associati al riferimento sono xy, yz e zx

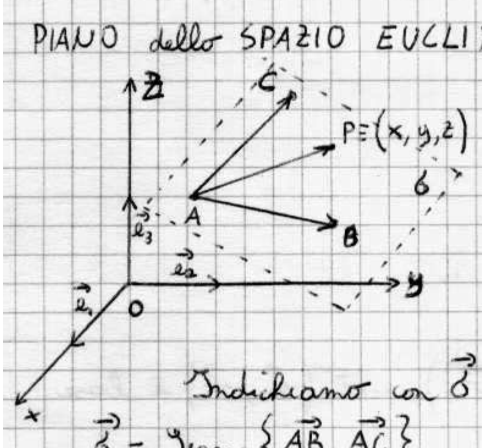
Se $R = (O, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3))$, $P_R \equiv (x, y, z)$, $R' = (O', (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3))$ $P_{R'} \equiv (x', y', z')$ e se conosciamo le coordinate di O' rispetto a R: $O'_R \equiv (q^1, q^2, q^3)$



$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \vec{f}_1 &= a_1^1 \vec{e}_1 + a_1^2 \vec{e}_2 + a_1^3 \vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 &= a_2^1 \vec{e}_1 + a_2^2 \vec{e}_2 + a_2^3 \vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 &= a_3^1 \vec{e}_1 + a_3^2 \vec{e}_2 + a_3^3 \vec{e}_3 \end{aligned}$$

allora si ha $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix}$ oppure $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x' - q^1 \\ y' - q^2 \\ \cancel{z}' - q^3 \end{pmatrix}$

PIANO dello SPAZIO EUCLIDEO E_3



$A_R \equiv (x_0, y_0, z_0)$

$B_R \equiv (x_1, y_1, z_1)$

$C_R \equiv (x_2, y_2, z_2)$

Sia σ il piano contenente A, B, C

Lo spazio vettoriale generato da $\{\vec{AB}, \vec{AC}\}$ ha dimensione 2

Indichiamo con $\vec{\sigma}$ la giacitura di σ, cioè il sottospazio vettoriale di $\vec{E}_3$

$\vec{\sigma} = \text{Span}\{\vec{AB}, \vec{AC}\}$

$\forall P \equiv (x, y, z) \in \sigma$ deve essere soddisfatta la condizione che $\vec{AP} \in \text{Span}\{\vec{AB}, \vec{AC}\}$

cioè devono esistere $\lambda, \mu \in R$ tale che $\boxed{\vec{AP} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC}}$ → eq. vettoriale del piano σ

In termini di componenti:

$$\begin{cases} x - x_0 = \lambda(x_1 - x_0) + \mu(x_2 - x_0) \\ y - y_0 = \lambda(y_1 - y_0) + \mu(y_2 - y_0) \\ z - z_0 = \lambda(z_1 - z_0) + \mu(z_2 - z_0) \end{cases} \quad \text{con } \lambda, \mu \in R$$

← equazioni parametriche del piano σ

I 3 vettori $\vec{AP}$, $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ devono essere linearmente dipendenti

$$\rho\begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{pmatrix}=2 \quad \text{equivale a} \quad \rho\begin{pmatrix} x_p & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_0 & 1 \end{pmatrix}=3$$

cioè
$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix}=0$$
Sviluppando con La-Place $ax+by+cz+d=0$ $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ che è l'equazione cartesiana del piano σ.

ESEMPIO: trovare l'equazione parametrica e quella cartesiana di σ costante.

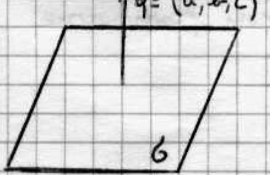
$A\equiv(2,0,1)$ $\quad B\equiv(3,1,-1)$ $\quad C\equiv(1,-1,2)$

$$\begin{cases} x=2+\lambda(3-2)+\mu(1-2) \\ y=0+\lambda(1-0)+\mu(-1-0) \\ z=1+\lambda(-1-1)+\mu(2-1) \end{cases} \quad \begin{cases} x=2+\lambda-\mu \\ y=\lambda-\mu \\ z=1-2\lambda+\mu \end{cases} \quad \lambda,\mu\in R$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad -x+y+2=0$$

Se un piano $\sigma)\ ax+by+cz+d=0$ $\quad (a,b,c)\neq(0,0,0)$

La giacitura $\vec{\sigma}$ di σ è descritta dall'equazione omogenea $ax+by+cz=0$



Il vettore $\vec{q}\equiv(a,b,c)$ è sempre ortogonale a σ

POSIZIONI RECIPROCHE di 2 PIANI

Se $\sigma)\ ax+by+cz+d=0$ e $\sigma')\ a'x+b'y+c'z+d'=0$ con $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ $(a',b',c')\neq(0,0,0)$

$$\sigma\cap\sigma'=\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$$

1) I piani sono coincidenti, cioè $\rho B=1$
2) I piani sono paralleli e disgiunti se $1=\rho A\neq\rho B=2$
3) I piani sono incidenti, e l'intersezione avviene su una retta $\rho A=\rho B=2$

ESEMPIO

① $\sigma)\ 2x-y+3z+2=0$ $\quad \sigma')\ 6x-3y+9z+6=0$ $\quad \sigma'')\ 6x-3y+9z+1=0$

$\sigma''')\ x-y+2z+5=0$ $\quad$ σ e σ' sono coincidenti

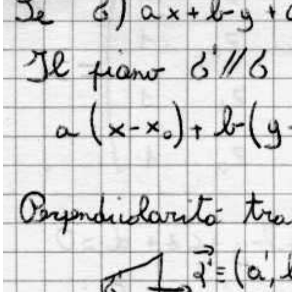
σ e σ'' sono // e disgiunti $\quad$ σ e σ''' sono incidenti

Se $\sigma) \; ax+by+cz+d=0$ e $P\equiv(x_0,y_0,z_0)\notin\sigma$

Il piano $\sigma' \parallel \sigma$ e contenente P ha equazione cartesiana

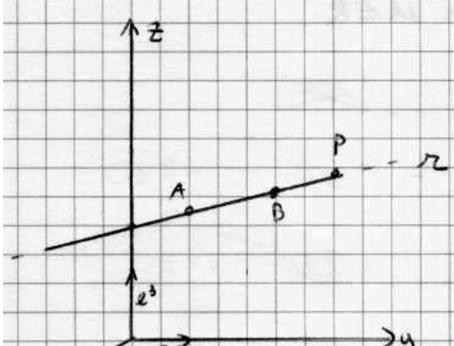
$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

Perpendicolarità tra piani se $\sigma) \; ax+by+cz+d=0$ e $\sigma') \; a'x+b'y+c'z+d'=0$



σ e σ' sono perpendicolari se e solo se q e q' sono ortogonali; cioè $\vec{q}\cdot\vec{q}'=0$ cioè $aa'+bb'+cc'=0$

RETTE NELLO SPAZIO EUCLIDEO E_3



Siano A e B due punti distinti

$A\equiv(x_0,y_0,z_0) \quad B\equiv(x_1,y_1,z_1)$

$\vec{AB}$ è una base per la giacitura $\vec{r}$ della retta r contenente A e B

$\vec{r}=\text{Span}\{\vec{AB}\}$, $\vec{r}$ ha dimensione 1

Se $P\equiv(x,y,z)\in r$ allora deve valere:

$\vec{AP}=\lambda\vec{AB} \Rightarrow$ equazione vettoriale della retta

$$\begin{cases} x-x_0=\lambda(x_1-x_0) \\ y-y_0=\lambda(y_1-y_0) \\ z-z_0=\lambda(z_1-z_0) \end{cases}$$

Se $x_1\neq x_0 \quad y_1\neq y_0 \quad z_1\neq z_0$

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0} \quad \text{equazioni frazionarie}$$

<u>Rappresentazione cartesiana</u>

$\vec{AP}$ e $\vec{AB}$ sono linearmente dipendenti

$$\rho\begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \end{pmatrix}=1 \Rightarrow \text{equivale a dire } \rho\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \end{pmatrix}=2$$

Per il II° teorema di Kroneker $\exists$ un minore di ordine 2 non nullo e devono essere nulli i suoi 2 orlati

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases} \qquad \rho\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}=2$$

La giacitura $\vec{r}$ di r è completamente descritta dal sistema omogeneo

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}$$

ESEMPIO: trovare le equazioni della retta r contenente i punti $A \equiv (2,3,5)$ $B \equiv (1,-2,3)$

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda(1-2) \\ y = 3 + \lambda(-2-3) \\ z = 5 + \lambda(3-5) \end{cases} \text{ con } \lambda \in R \qquad \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 3 - 5\lambda \\ z = 5 - 2\lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in R$$

equazioni frazionarie $\quad \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-3}{-5} = \dfrac{z-5}{-2}$

equazioni cartesiane $\quad \begin{cases} x - 2 = \dfrac{y-3}{5} \\ x - 2 = \dfrac{z-5}{2} \end{cases} \qquad \rho \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 2$

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x & z & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + y - 4 - 3 - 2y + 2x = 0 \\ 5x + 6 + z - 5 - 3x - 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x - y - 7 = 0 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{cases}$$

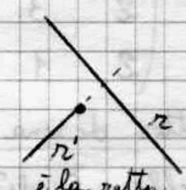
Posizioni reciproche di 2 rette nello spazio euclideo E_3

1) Coincidenti

2) Parallele e disgiunte

3) Incidenti in un punto

4) Sghembe $\quad r \cap r' \neq \emptyset \qquad \vec{r} \cap \vec{r'} = \{\emptyset\}$



r' è la retta entrante nel foglio

Se $r) \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ con $\rho \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$

$r') \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' = 0 \end{cases}$ con $\rho \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{pmatrix} = 2$

$$A \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{pmatrix} \qquad B \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$$

1) Coincidenti se $\vartheta(A) = \vartheta(B) = 2$
2) Parallele e disgiunte se $2 = \vartheta(A) \neq \vartheta(B) = 3$
3) Incidenti se $\vartheta(A) = \vartheta(B) = 3$
4) Sghembe se $3 = \vartheta(A) \neq \vartheta(B) = 4$

ESEMPIO: studiare al variare del parametro $a \in R$ la posizione delle rette:

$$r) \begin{cases} 2x + 3z = 2 + a \\ x - y + z = a \end{cases} \qquad A \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2(a-1) \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad B \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -2-a \\ 1 & -1 & 1 & -a \\ 2 & 3 & 2(a-1) & 0 \\ a & 1 & a & -a \end{pmatrix}$$

$$r') \begin{cases} 2x + 3y + 2(a-1)\cdot z = 0 \\ 2x + y + a\cdot z = a \end{cases}$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & -2-a \\ 1 & -1 & 1 & -a \\ 5 & 0 & 2a+1 & -3a \\ 3 & 0 & 1+a & -2a \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2-a \\ 5 & 2a+1 & -3a \\ 3 & 1+a & -2a \end{vmatrix} = (a-1)(a-4)$$

Se $a \neq 1$ o $a \neq 4$ $\det(B) \neq 0$ le rette sono sghembe

$$\text{Se } a = 1 \quad A \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \quad \vartheta(A) = 3 = \vartheta(B)$$

le rette sono incidenti

$$\text{Se } a = 4 \quad A \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \quad \vartheta(A) = 3 = \vartheta(B)$$

le rette sono incidenti

Coefficienti direttori di una retta

Si dicono coefficienti direttori di una retta r le componenti di un vettore non nullo della sua giacitura $\vec{r}$

I coefficienti si indicano con (l, m, n)

Equazione cartesiana $r) \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ $\quad \vartheta\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$

$\vec{r}) \begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases} \Rightarrow (l, m, n)$ devono essere soluzioni di questo sistema, cioè:

$$\begin{cases} al + bm + cn = 0 \\ a'l + b'm + c'n = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

$$l = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \qquad m = -1 \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \qquad n \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

Per il teorema di La-Place (l, m, n), così scelti sono una soluzione del sistema omogeneo

$$(l, m, n) = \rho \left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, -1 \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right)$$

ESERCIZIO:

$$r) \begin{cases} 5x - y - 7 = 0 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{cases} \qquad \vec{r}) \begin{cases} 5x - y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

$$l = \begin{vmatrix} -1_y & 0_z \\ 0_y & -1_z \end{vmatrix} = 1 \qquad m = \begin{vmatrix} 0_z & 5_x \\ -1_z & 2_x \end{vmatrix} = 5 \qquad n = \begin{vmatrix} 5_x & -1_y \\ 2_x & 0_y \end{vmatrix} = 2$$

$$(l, m, n) = \rho(1, 5, 2)$$

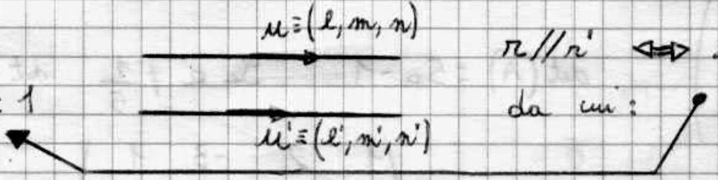
Se r ha equazione parametrica

$$\begin{cases} x = a_0 + \lambda u_0 \\ y = a_1 + \lambda u_1 \\ z = a_2 + \lambda u_2 \end{cases} \qquad (l, m, n) = \rho(u_0, u_1, u_2) \quad \text{con } \rho \in R$$

r ha equazioni frazionarie del tipo: $\dfrac{x - x_0}{u_0} = \dfrac{y - y_0}{u_1} = \dfrac{z - z_0}{u_2}$

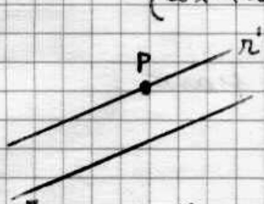
<u>TEOREMA</u> condizione necessaria e sufficiente affinché 2 rette r ed r' di coefficienti direttori (l, m, n) e (l', m', n') siano parallele (ed eventualmente coincidenti) è che:

$$\rho \begin{pmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} = 1$$



$r // r' \iff \vec{u}$ e $\vec{u'}$ sono paralleli da cui:

Se $r) \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \qquad \rho \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2 \qquad P \equiv (x_0, y_0, z_0)$

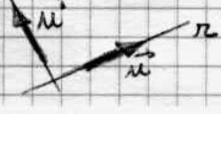


$$r') \begin{cases} a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \\ a'(x - x_0) + b'(y - y_0) + c'(z - z_0) = 0 \end{cases} \qquad r' // r \quad \text{e } P \in r$$

In forma parametrica $r') \begin{cases} x = x_0 + \lambda l \\ y = y_0 + \lambda m \\ z = z_0 + \lambda n \end{cases} \quad \lambda \in R$

In forma frazionaria $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$

<u>TEOREMA</u>: condizione necessaria e sufficiente affinché 2 rette r e r' di coefficienti direttori (l, m, n) e (l', m', n') siano ortogonali è che $l \cdot l' + m \cdot m' + n \cdot n' = 0$



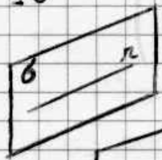
$r \perp r' \iff \vec{u} \perp \vec{u'} \iff \vec{u} \cdot \vec{u'} = 0$

Posizione di una retta e di un piano

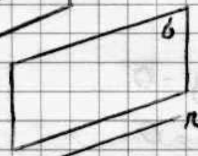
Dati: $\sigma)\ ax+by+cz+d=0 \qquad (a,b,c)\neq(0,0,0)$

$$r)\begin{cases}\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0\\ \alpha' x+\beta' y+\gamma' z+\delta'=0\end{cases} \qquad \rho\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \alpha' & \beta' & \gamma'\end{pmatrix}=2$$

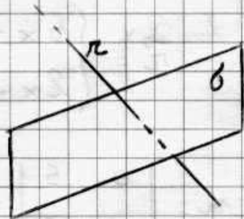
1) la retta $r \in \sigma$



2) $r \parallel \sigma$



3) r e σ sono incidenti in un punto



$$\begin{cases}ax+by+cz+d=0\\ \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0\\ \alpha' x+\beta' y+\gamma' z+\delta=0\end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix}a & b & c\\ \alpha & \beta & \gamma\\ \alpha' & \beta' & \gamma'\end{pmatrix} \qquad \rho(A)\geq 2$$

$$B=\begin{pmatrix}a & b & c & d\\ \alpha & \beta & \gamma & \delta\\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta'\end{pmatrix}$$

1) $\rho(A)=\rho(B)=2$
2) $2=\rho(A)\neq\rho(B)=3$
3) $\rho(A)=\rho(B)=3$

ESEMPIO: studiare la posizione della retta r rispetto al piano σ al variare di a

$$r)\begin{cases}x+2y-3z=1\\ x+y+z=0\end{cases} \qquad \sigma)\ ax+y-3z=4a \qquad a\in\mathbb{R}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 1 & 1 & 1\\ a & 1 & -3\end{pmatrix}$$

$\det(A)=5a-1$ Se $a\neq\frac{1}{5}$ $\det(A)\neq 0$ sono incidenti

Se $a=\frac{1}{5}$ $\rho(A)=2$

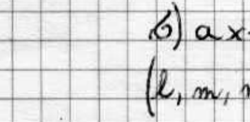
$$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & 1 & -3 & -\frac{4}{5}\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ \frac{1}{5} & 1 & -\frac{4}{5}\end{vmatrix}=0$$

$\rho(B)=2 \Rightarrow$ la retta è contenuta nel piano

TEOREMA: condizione necessaria e sufficiente affinché un piano σ dato in forma cartesiana $\sigma)\ ax+by+cz+d=0$ e una retta di cui conosciamo i coefficienti direttori (l,m,n) siano paralleli (ed eventualmente $r\in\sigma$) è che $al+bm+cn=0$

DIMOSTRAZIONE $\vec{u}=(l,m,n)$



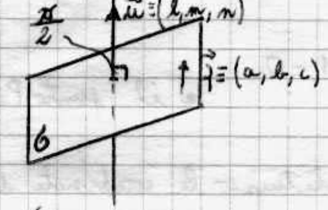
$r \parallel \sigma \iff \vec{u}\in\sigma \iff al+bm+cn=0$ perché

$\sigma)\ ax+by+cz=0$

<u>TEOREMA:</u> condizione necessaria e sufficiente affinché una retta r di coefficienti direttori (l, m, n) e un piano $\sigma) \, ax + by + cz + d = 0$ siano ortogonali è che

$$\vartheta \begin{pmatrix} l & m & n \\ a & b & c \end{pmatrix} = 1$$

DIMOSTRAZIONE



$r \perp \sigma \iff \vec{u}$ e $\vec{n}$ sono proporzionali

Se ho σ nella solita forma cartesiana e ho un punto $P \equiv (x_0, y_0, z_0)$ se voglio trovare r con $P \in r \perp \sigma$, in forma parametrica sarà

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$$

ESEMPIO: $\quad \sigma) \, 2x - 3y + 7z - 5 = 0 \qquad P \equiv (1, 0, -4) \qquad P \in r \perp \sigma$ in forma parametrica

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda(2) \\ y = 0 + \lambda(-3) \\ z = 4 + \lambda(7) \end{cases}$$

Se ho una retta di coefficienti direttori (l, m, n) e $P \equiv (x_0, y_0, z_0)$

Il piano $\sigma \perp r$ e contenente P è $\; l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0)$

ESEMPIO

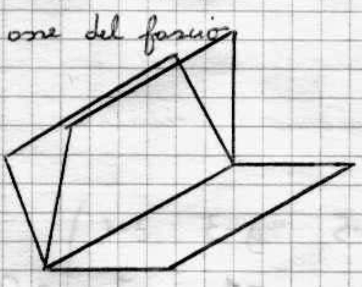
$$r) \begin{cases} x + 2y - z + 4 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases} \qquad P \equiv (1, 0, 0) \quad \text{trovare } \sigma \perp r \text{ con } P \in \sigma$$

$$\vec{r}) \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \qquad l = 1 \quad m = 2 \Rightarrow n = 5 \qquad \sigma) \, 1(x-1) + 2(y-0) + 5(z-0) = 0$$

$\sigma) \; x + 2y - 5z - 1 = 0$

<u>FASCI DI PIANI</u>

- Si dice fascio proprio di piani l'insieme di tutti i piani che si intersecano in una retta detta asse del fascio



<u>TEOREMA:</u> se σ e σ' sono 2 piani che individuano un fascio proprio

$\sigma) \; ax + by + cz + d = 0 \qquad (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

$\sigma') \; a'x + b'y + c'z + d' = 0 \qquad (a', b', c') \neq (0, 0, 0)$

e $\vartheta \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$

allora tutti e soli i piani del fascio individuati da σ e σ' hanno equazioni di questo tipo: $\rightarrow$

$$\lambda(ax+by+cz+d) + \mu(a'x+b'y+c'z+d') = 0 \quad \text{con } (\lambda,\mu) \neq (0,0)$$

• Si dice fascio improprio l'insieme dei piani paralleli tra di loro

TEOREMA se $\sigma)\ ax+by+cz+d=0$ $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ di un fascio improprio, allora tutti e soli i piani individuati da σ sono equazioni

$$ax+by+cz+\lambda=0 \quad \text{con } \lambda\in\mathbb{R}$$

ESEMPIO: trovare il piano contenente la retta $r)\begin{cases}x-2y-3z-1=0\\ x-z-2=0\end{cases}$ e il punto $P\equiv(1,1,0)$

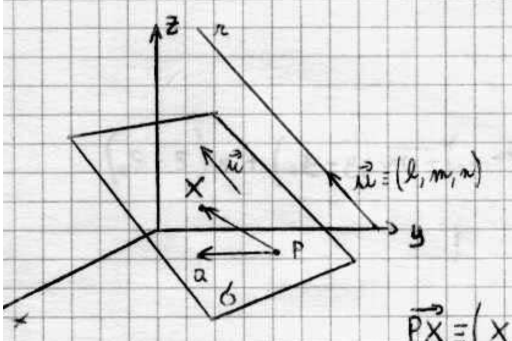
Fascio di piani di asse r $\lambda(x-2y-3z-1)+\mu(x-z-2)=0$ sostituisco le coordinate di P

$\lambda(1+2-1)+\mu(1-2)=0$ $\quad 2\lambda-\mu=0$ posso prendere $\lambda=1$ e $\mu=2$

tornando a sostituire avrò $x-2y-3z+2x-2z-4=0$ cioè $\sigma)\ 3x-2y-5z-5=0$

ESEMPIO: trovare σ passante per i punti $P\equiv(0,1,1)$ $Q\equiv(1,2,-1)$ e parallelo alla retta

$r)\begin{cases}x-1=y+z\\ y-2=0\end{cases}$ $\quad \vec{r})\begin{cases}x-y-z=0\\ y=0\end{cases}$ $\quad \vec{u}=(l,m,n)=(1,0,1)$ perché $x=z$

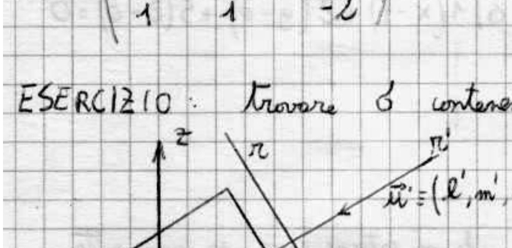


$$\sigma)\begin{cases}x=0+1\lambda+\mu(1-0)\\ y=1+0\lambda+\mu(2-1)\\ z=1+1\cdot\lambda+\mu(-1-1)\end{cases} \quad \begin{cases}x=\lambda+\mu\\ y=1+\mu\\ z=1+\lambda-2\mu\end{cases} \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

Per l'equazione cartesiana, se indico con $X\equiv(x,y,z)$ i vettori $\vec{PX}\equiv(x,y-1,z-1)$, $\vec{u}$ e $\vec{PQ}$ devono essere linearmente indipendenti, cioè

$$\det\begin{pmatrix}x & y-1 & z-1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}=0 \qquad \sigma)\ x-3y-z+4=0$$

ESERCIZIO: trovare σ contenente $A\equiv(5,3,1)$ e parallelo alla retta $r)\begin{cases}x-2y-3z=1\\ x-z-2=0\end{cases}$



$$r')\begin{cases}x=2+\lambda\\ y=4+2\lambda\\ z=2-\lambda\end{cases} \qquad \vec{r})\begin{cases}x-2y-3z=0\\ x-z=0\end{cases}$$

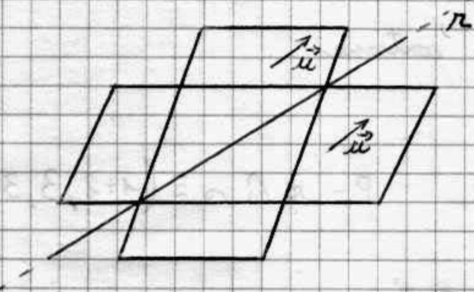
$$(l,m,n)=(1,-1,1)=\vec{u}$$

$\begin{cases}x=5+\lambda(1)+1\mu\\ y=3+(-1)\lambda+2\cdot\mu\\ z=1+1\lambda+(-1)\mu\end{cases}$ equazione cartesiana $\vec{AX}=(x-5,y-3,z-1)$ $\det\begin{pmatrix}x-5 & y-3 & z-1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}=0$

$\sigma)\ x-2y-3z+4=0$

ESERCIZIO dati $\alpha)\ 3x - y + z + 5 = 0$ e $\beta)\ x + y + z = 1$ trovare la retta

r passante per $P \equiv (1,2,3)$ e parallela a entrambi i piani



$$r) \begin{cases} x = 1 + \lambda l \\ y = 2 + \lambda m \\ z = 3 + \lambda n \end{cases}$$

$r // \alpha \quad \vec{u} \equiv (l, m, n) \in \vec{\alpha} \qquad \vec{\alpha})\ 3x - y + z = 0$ cioè

$r // \beta \quad \vec{u} \equiv (l, m, n) \in \vec{\beta} \qquad \vec{\beta})\ x + y + z = 0$ cioè

$$\begin{cases} 3l - m + n = 0 \\ l + m + n = 0 \end{cases}$$

$$l = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad m = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad n = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$(l, m, n) = (1, 1, -2)$

$$r) \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$$ $\Rightarrow$ ricavo l'equazione frazionaria poi da questa ricavo quella cartesiana

COMPITINO

FINO

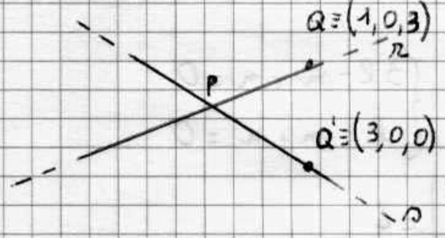
QUI

Esercizio: date le rette

$$r)\begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 3+\lambda \end{cases} \qquad s)\begin{cases} x=3 \\ 4y=3 \end{cases}$$

provare che sono incidenti e trovare il piano che le contiene

SOSTITUENDO $\begin{cases} 1+2\lambda = 3 \\ 12\lambda = 9+3\lambda \end{cases}$ $\begin{cases} \lambda = 1 \\ 12=12 \end{cases}$ $\Rightarrow \lambda = 1$ $P = r \cap s \equiv (1+2, 3, 3+1)$



piano passante per P, Q, Q'

$$\det\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Avendo posto il determinante $=0$, ho che $9x-8y+6z-27=0$

2° METODO: Fascio di piani di asse s $\quad \lambda(x-3)+\mu(4y-3z)=0$

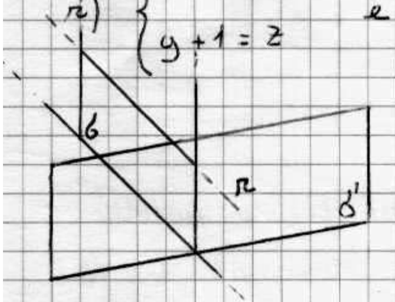
sostituisco con le coordinate di Q

$\lambda(1-3)+\mu(0-9)=0 \qquad -2\lambda-9\mu \Rightarrow \lambda=9$ e $\mu=-2$

ESEMPIO: Trovare il piano σ contenente la retta

$$r)\begin{cases} x-1=z \\ y+1=z \end{cases}$$

e ortogonale al piano $\sigma') \ x+2y-z-5=0$



Costruiamo il fascio di piani di asse r

$\lambda(x-z+1)+\mu(y+1-z)=0$

$\lambda x+\mu y-\lambda\mu z-\lambda+\mu=0$

Impongo la condizione di ortogonalità tra i piani

$\lambda+2\mu+(-1)(-\lambda-\mu)=0 \qquad \lambda+2\mu+\lambda+\mu=0 \Rightarrow \lambda=3$ e $\mu=-2$

$\sigma) \ 3x-2y-z+5=0$

ESERCIZIO: trovare la proiezione ortogonale di una retta in un piano della retta

$$r)\begin{cases} x-y-z-1=0 \\ y-2=0 \end{cases}$$

sul piano $\sigma) \ x+3y-z+2=0$

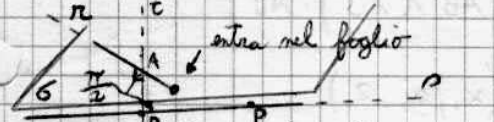
Cerchiamo il piano σ' contenente r e perpendicolare a σ

$\lambda(x-y-z-1)+\mu(y-2)=0 \Rightarrow \lambda=3$ e $\mu=1$

$\sigma') \ 3x-2y-3z-5=0 \qquad r')\begin{cases} x+3y-z+2=0 \\ 3x-2y-3z-5=0 \end{cases}$

DISTANZA TRA 2 RETTE SGHEMBE

1° METODO



Si considera il piano σ contenente la retta r e parallelo alla retta s
Si sceglie un punto a piacere $P \in s$, allora la distanza

$$d(r,s) = d(\sigma, P)$$

2° METODO

Si considera la retta t, perpendicolare comune a r e ad s

$A = r \cap t \qquad B = r \cap s \qquad d(r,s) = d(A,B)$

ESEMPIO: calcolare la distanza tra le rette sghembe

$$r)\ \begin{cases} x-1 = \frac{y-1}{2} \\ x-1 = z \end{cases} \qquad s)\ \begin{cases} \frac{x}{2} = y \\ y = -\frac{z}{2} \end{cases}$$

$$r)\ \begin{cases} 2x-y-1=0 \\ x-z-1=0 \end{cases} \qquad \text{Fascio di piani di asse } r \qquad \mathcal{F})\ \lambda(2x-y-1)+\mu(x-z-1)=0$$

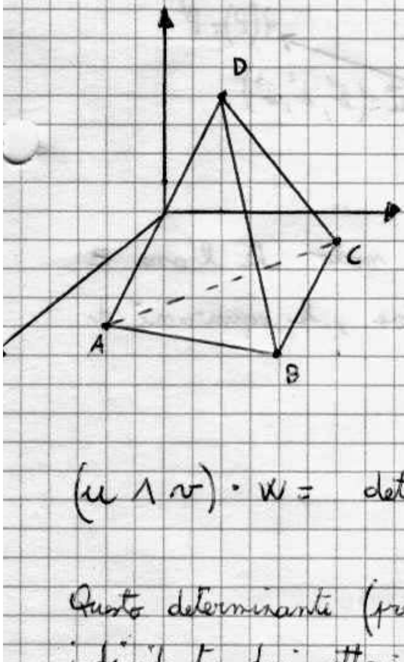
$$\vec{\mathcal{F}})\ \lambda(2x-y)+\mu(x-z)=0 \qquad \vec{u}_s \equiv (2,1,-2)$$

Sostituendo $\vec{u}_s$ in $\vec{\mathcal{F}})$ $\lambda(4-1)+\mu(2+2) = 3\lambda+4\mu = 0 \Rightarrow \lambda = 4$ e $\mu = -3$

$$\sigma)\ (8-3)x-4y+3z-1=0$$

VOLUMI IN E_3

Volume del tetraedro, $\forall A,B,C,D$ non complanari



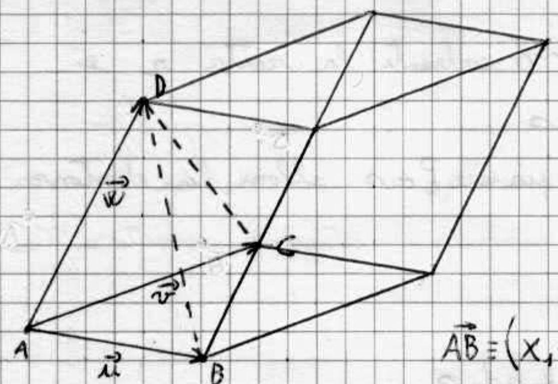
$\forall$ spazio vettoriale di dimensione 3, con un fissato prodotto scalare, e sia $B = (e_1, e_2, e_3)$ base ortonormale per V_3

$\forall\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$ abbiamo:

$$\vec{u} = \vec{e}_1 u_1 + \vec{e}_2 u_2 + \vec{e}_3 u_3$$
$$\vec{v} = \vec{e}_1 v_1 + \vec{e}_2 v_2 + \vec{e}_3 v_3$$
$$\vec{w} = \vec{e}_1 w_1 + \vec{e}_2 w_2 + \vec{e}_3 w_3$$

$$(u \wedge v)\cdot w = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

Questo determinante (preso in valore assoluto) rappresenta il volume del parallelepipedo individuato dai vettori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$



$$Vol(ABCD) = \frac{1}{6}\, Vol(\text{parallelepipedo})$$

$$Vol(ABCD) = \frac{1}{6} \left| \left(\vec{AB} \wedge \vec{AC} \right) \cdot \vec{AD} \right|$$

$A \equiv (x_0, y_0, z_0)$ $\quad B \equiv (x_1, y_1, z_1)$

$C \equiv (x_2, y_2, z_2)$ $\quad D \equiv (x_3, y_3, z_3)$

$\vec{AB} \equiv (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ $\quad \vec{AC} \equiv (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$

$\vec{AD} \equiv (x_3 - x_0, y_3 - y_0, z_3 - z_0)$

$$Vol(ABCD) = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{pmatrix} \right| = \dots$$

ISOMETRIE IN E_3

Si dice isometria di E_3 ogni applicazione biunivoca di E_3 in E_3 che conserva le distanze

$P \in E_3 \rightarrow \varphi(P) = P'$

$Q \in E_3 \rightarrow \varphi(Q) = Q'$ $\quad d(P,Q) = d(P',Q')\,, \ \forall P,Q \in E_3$

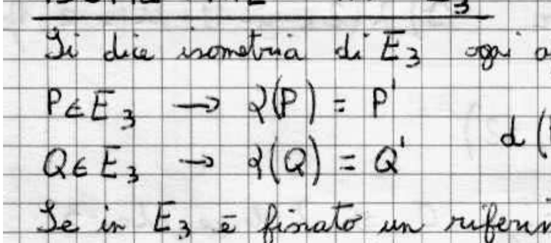
Se in E_3 è fissato un riferimento cartesiano R e $P \equiv (x,y,z)$ $\quad \varphi(P) = P' \equiv (x',y',z')$

$$\varphi \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} \qquad A = (a^i_j) \in O(3,R) \qquad A \cdot {}^tA = I_3$$

Ovviamente $\det(A) = \begin{cases} +1 & \text{isometria diretta} \\ -1 & \text{isometria indiretta} \end{cases}$

Se $A = I_3$ $\quad \varphi) \begin{cases} x' = x + b^1 \\ y' = y + b^2 \\ z' = z + b^3 \end{cases}$ traslazione (isometria diretta)

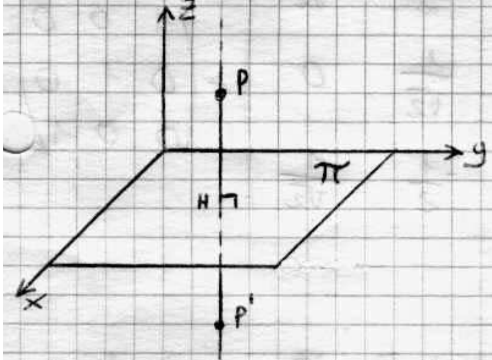
<u>Rotazione intorno a una retta</u>



Se scegliamo un riferimento in modo che l'asse z coincida con l'asse di rotazione, le equazioni di rotazione attorno alla retta sono:

$$\begin{cases} x' = (\cos\theta)x - (\operatorname{sen}\theta)y \\ y' = (\operatorname{sen}\theta)x + (\cos\theta)y \\ z' = z \end{cases}$$

SIMMETRIA Ortogonale rispetto a un piano

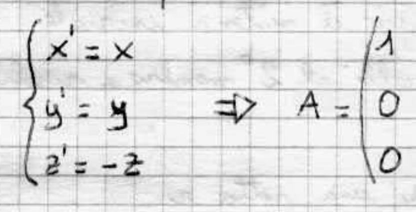


$d(P,H) = d(H,P')$

Se scegliamo un riferimento cartesiano in modo che il piano coordinato xy $(z=0)$ coincida con π le equazioni della simmetria ortogonale rispetto a π sono:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = -z \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = -1 \quad \text{isometria inversa}$$

ESEMPIO trovare le equazioni della simmetria di E_3 di centro $A \equiv (2,-1,2)$

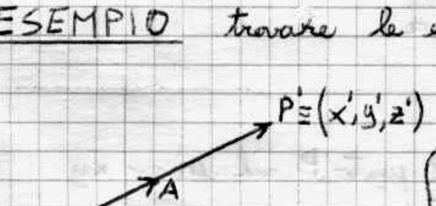


$\vec{PA} = \vec{AP'}$

$$\begin{cases} 2 - x = x' - 2 \\ -1 - y = y' + 1 \\ 2 - z = z' - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x' = -x + 4 \\ y' = -y - 2 \\ z' = -z + 4 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = -1$ isometria inversa

ESEMPIO: determinare le equazioni della simmetria ortogonale dello spazio E_3 rispetto al piano $\pi)\ x + 2y - 3z + 5 = 0$



la retta contenente $P \perp \pi$

$$\begin{cases} x = \bar{x} + \lambda \\ y = \bar{y} + 2\lambda \\ z = \bar{z} - 3\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad H = \pi \cap r$$

$$\bar{x} + \lambda + 2(\bar{y} + 2\lambda) - 3(\bar{z} - 3\lambda) + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-\bar{x} - 2\bar{y} + 3\bar{z} - 5}{14}$$

$$H \equiv \left(\bar{x} + \frac{-\bar{x} - 2\bar{y} + 3\bar{z} - 5}{14},\ \bar{y} + \frac{-\bar{x} - 2\bar{y} + 3\bar{z} - 5}{7},\ \bar{z} - 3 + \frac{-\bar{x} - 2\bar{y} + 3\bar{z} - 5}{14} \right)$$

$$\frac{\bar{x} + x'}{2} = \bar{x} + \frac{-\bar{x} - 2\bar{y} + 3\bar{z} - 5}{14}$$ stessa cosa per y e z

ESEMPIO: stabilire se l'applicazione $f: E_3 \to E_3$ di equazioni

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{2}z \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{2}z \\ z' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z \end{cases}$$

è una simmetria, se sì, stabilire se diretta o inversa e classificarla

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad A \cdot {}^tA = A \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

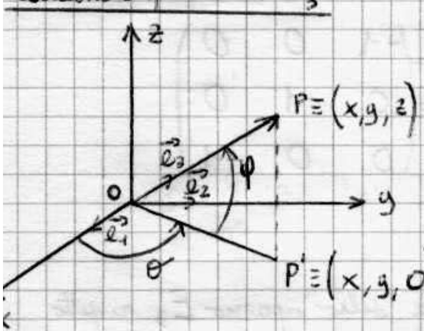
$\det(A) = 1$ isometria diretta

Trovare i punti fissi di f, cioè $P \in E_3$ / $f(P) = P$, cioè copio il sistema iniziale e trasformo x' in x, y' in y e z' in z e li sommo con quelli al 2° membro e risolvo il sistema

$$r) \begin{cases} y = -z \\ x = (\sqrt{2} - 1) z \end{cases}$$

I punti fissi sono quelli di una retta r $\Rightarrow$ è una rotazione intorno a r

Coordinate polari in E_3



Sia P' la proiezione ortogonale del punto P sul piano xy

Sia θ l'angolo tra $\vec{e}_1$ e $\overline{OP'}$

Sia φ l'angolo tra OP' e OP

Si dicono coordinate polari del punto P la terna (ρ, θ, φ) dove $\rho = \|\overline{OP}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \cos\varphi = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad \operatorname{sen}\varphi = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$x = \rho\cos\theta\cos\varphi \qquad y = \rho\operatorname{sen}\theta\cos\varphi \qquad z = \rho\operatorname{sen}\varphi$$

SPAZI PROIETTIVI (cenni)

Sia V_{n+1} uno spazio vettoriale su un campo K di dimensione $n+1$

Considero l'insieme $V_{n+1} - \{\vec{O}\}$ e su questo insieme stabiliamo una relazione

$u, v \in V_{n+1} - \{\vec{O}\}$, $u \wedge v \iff \exists \lambda \in K, \lambda \neq 0 \ / \ v = \lambda u$

$[\vec{u}] = \{v \in V_{n+1} - \{\vec{O}\} \ / \ v = \lambda u, \lambda \in K, \lambda \neq 0\}$

L'insieme quoziente che ha come elementi le classi di equivalenza si indica con:

$\dfrac{V_{n+1} - \{\vec{O}\}}{\sim} = P_n$ che è lo spazio proiettivo di dimensione n

ESEMPIO: $V_{n+1} = R^3$ sul campo R $\quad R^3 - \{\vec{O}\} = R^3 - \{(0,0,0)\}$

(x^1, x^2, x^3) è in relazione (y^1, y^2, y^3) se $\exists \lambda \in R, \lambda \neq 0 \ / \ (y^1, y^2, y^3) = \lambda(x^1, x^2, x^3)$

$R^3 - \{\vec{O}\}/\sim \; = P_2$

Ampliamento proiettivo del piano euclideo reale E_2

In E_2 consideriamo $\vec{E}_2$. Nell'insieme $\vec{E}_2 - \{O\}$ definiamo la relazione di proporzionalità tra vettori $\vec{u} \sim \vec{v} \iff \exists \lambda \in R,\ \lambda \neq 0 \ / \ \vec{v} = \lambda \vec{u}$

$\dfrac{E_2 - \{\vec{O}\}}{\sim} = P_1$ indica la retta impropria o retta all'infinito

Se fissiamo in E_2 un riferimento R $\quad X \in E_2 \quad X \equiv (x, y)$

diremo coordinate cartesiane omogenee o coordinate proiettive di $X \in E_2$ ogni terna (x^1, x^2, x^3) con $x^3 \neq 0$ / $x = \dfrac{x^1}{x^3}$ $\quad y = \dfrac{x^2}{x^3}$

Una terna di coordinate cartesiane omogenee è $(x, y, 1)$, tutte le altre le ottengo moltiplicando questa per un coefficiente $\rho \neq 0$

$X \equiv [(x^1, x^2, x^3)]$

Se $\dfrac{\vec{E}_2 - \{\vec{O}\}}{\sim} = P'$ $\quad$ se $Y \in P'$ $\quad Y = [\vec{u}]$ $\quad \vec{u} \in \vec{E}_2 - \{\vec{O}\}$

Rispetto al riferimento $R = (O, (\vec{e}_1, \vec{e}_2))$ $\quad \vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2$

diremo che Y ha coordinate proiettive $[(u_1, u_2, 0)]$

Considero l'unione $E_2 \cup P'$ e l'applicazione biunivoca $f: E_2 \cup P' \to \dfrac{R^3 - \{\vec{O}\}}{\sim}$

Se prendo $X \in E_2 \to f(x) = [(x^1, x^2, x^3)]$

Se prendo $Y \in P_1 \to f(y) = [(u_1, u_2, 0)]$

$E_2 \cup P_1 = P_2$ che si dirà ampliato proiettivo del piano euclideo o piano euclideo ampliato

I punti $X \in E_2$ si dicono punti propri

I punti $Y \in P'$ si dicono punti impropri

Se r è una retta di E_2

$r)\ ax + by + c = 0$ $\quad$ se $\dfrac{x^1}{x^3} = x$ $\quad \dfrac{x^2}{x^3} = y$ e sostituisco

$a\dfrac{x^1}{x^3} + b\dfrac{x^2}{x^3} + c = 0 \Rightarrow ax^1 + bx^2 + cx^3 = 0 \Rightarrow$ equazione di r in coordinate cartesiane omogenee

il punto $P_\infty \equiv [(b, -a, 0)]$ è il punto improprio della retta r

P_∞ è il punto che si ottiene considerando un punto proprio $X \equiv (x, y)$ e facendo il limite, cioè:

$\lim\limits_{x^3 \to 0} (x, y) = \lim\limits_{x^3 \to 0} \left(\dfrac{x^1}{x^3}, \dfrac{x^2}{x^3}\right)$ $\quad$ La retta impropria P_1, con $x^3 = 0$

In generale se $A \equiv [(a^1, a^2, a^3)]$ e $B \equiv [(b^1, b^2, b^3)]$ allora l'equazione cartesiana della retta AB in coordinate omogenee (proiettive)

$X \equiv [(x^1, x^2, x^3)]$

$$\det\begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha x^1 + \beta x^2 + \gamma x^3 = 0$$

Le equazioni parametriche della retta AB in coordinate proiettive sono:

$$\begin{cases} x^1 = \lambda a^1 + \mu b^1 \\ x^2 = \lambda a^2 + \mu b^2 \\ x^3 = \lambda a^3 + \mu b^3 \end{cases}$$

CONICHE

Si dice conica del piano $(\mathcal{C})$, l'insieme dei punti $X \in P_2$ le cui coordinate proiettive (x^1, x^2, x^3) soddisfano un'equazione di 2° grado del tipo:

$$\mathcal{C})\ a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + a_{33}(x^3)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + 2a_{13}x^1x^3 + 2a_{23}x^2x^3 = 0$$

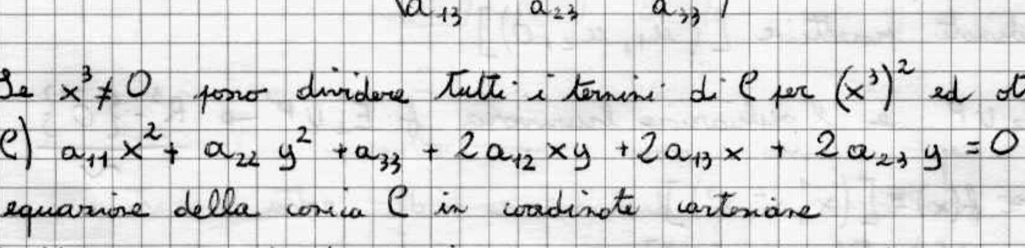
se $X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ $\quad \mathcal{C})\ {}^tX \cdot A \cdot X = 0$

Se $x^3 \neq 0$ posso dividere tutti i termini di $\mathcal{C}$ per $(x^3)^2$ ed ottengo:

$$\mathcal{C})\ a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y = 0$$

equazione della conica $\mathcal{C}$ in coordinate cartesiane

Coniche = curve ottenute sezionando un cono con un piano



parabola — ellisse o circonferenza (dipende dai casi — iperbole

Una conica si dice non degenere se $\det A \neq 0$

INTERSEZIONE DI UNA CONICA con una retta

$\mathcal{C})\ {}^tx \cdot A \cdot x = 0$ consideriamo una retta di coordinate proiettive, individuata dai punti $Y \equiv [(y^1, y^2, y^3)]$, $Z \equiv [(z^1, z^2, z^3)]$

$X \equiv [(x^1, x^2, x^3)]$

$$r)\ \begin{cases} x^1 = \lambda y^1 + \mu z^1 \\ x^2 = \lambda y^2 + \mu z^2 \\ x^3 = \lambda y^3 + \mu z^3 \end{cases} \qquad (\lambda, \mu) \neq (0,0)$$

se:
$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} \qquad z = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \lambda y + \mu z$$

$\mathcal{C} \cap r$

$$\begin{cases} {}^t x \cdot A \cdot x = 0 \\ x = \lambda y + \mu z \end{cases} \begin{cases} {}^t(\lambda y + \mu z) \cdot A \cdot (\lambda y + \mu z) = 0 \\ // \end{cases} \begin{cases} [\lambda \cdot {}^t y + \mu\, {}^t z] \cdot A \cdot (\lambda y + \mu z) = 0 \\ // \end{cases}$$

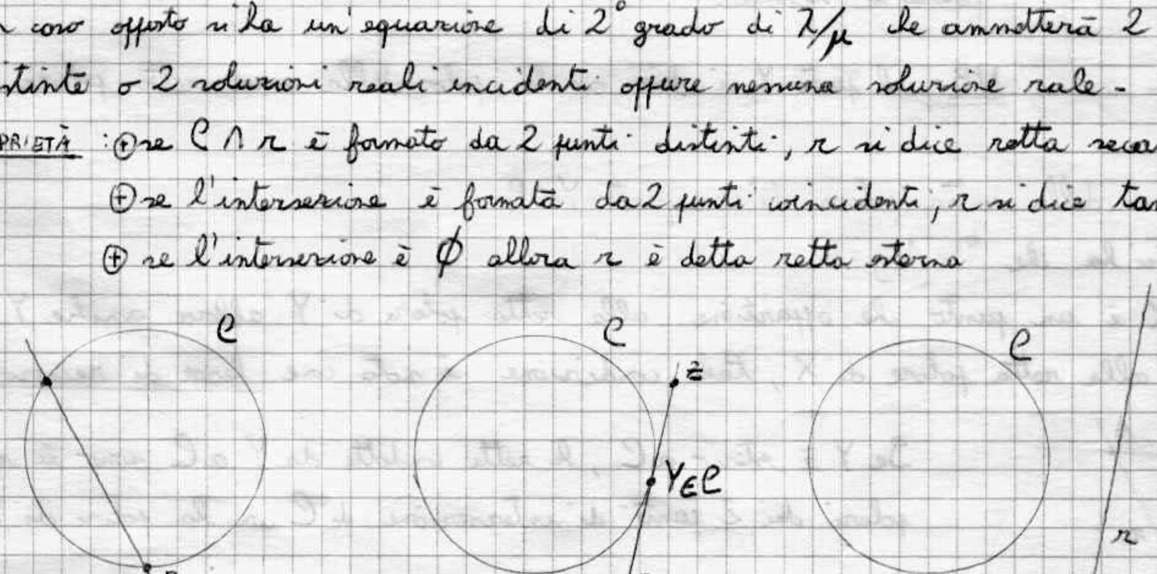
$$\begin{cases} \lambda^2 \cdot {}^t y \cdot A \cdot y + \lambda\mu \cdot {}^t y A z + \lambda\mu \cdot {}^t z A y + \mu^2 \cdot {}^t z A z = 0 \\ // \end{cases}$$ poiché A è simmetrica ottengo:

$$\begin{cases} \lambda^2 \cdot {}^t y A y + 2\mu\lambda\, {}^t y A z + \mu^2 \cdot {}^t z A z = 0 \\ // \end{cases}$$ dividendo per μ^2 ottengo un'equazione di 2° grado in λ/μ

Se: $\left.\begin{array}{l} {}^t y A y = 0 \Rightarrow Y \in \mathcal{C} \\ {}^t y A z = 0 \\ {}^t z A z = 0 \Rightarrow Z \in \mathcal{C} \end{array}\right\} \Rightarrow$ tutta la retta r è contenuta in $\mathcal{C}$

In caso opposto si ha un'equazione di 2° grado di λ/μ che ammetterà 2 soluzioni reali distinte o 2 soluzioni reali incidenti oppure nessuna soluzione reale -

PROPRIETÀ: ⊕ se $\mathcal{C} \cap r$ è formato da 2 punti distinti, r si dice retta secante.
⊕ se l'intersezione è formata da 2 punti coincidenti, r si dice tangente
⊕ se l'intersezione è $\emptyset$ allora r è detta retta esterna



secante   tangente   esterna

RETTA TANGENTE

Sia $Y \equiv [(y^1, y^2, y^3)] \in \mathcal{C}$ r) retta identificata da X e Z, se $X \in \mathcal{C}$

${}^t y A y = 0$

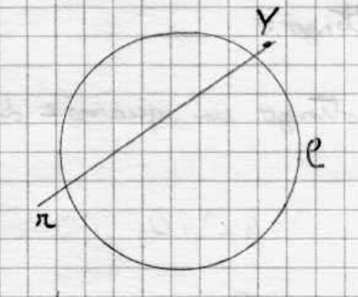
$2\lambda\mu \cdot {}^t y A z + \mu^2 \cdot {}^t z A z = 0$

Per far sì che la retta risulti tangente nel punto y le 2 intersezioni devono coincidere in Y: $\quad \mu(2\lambda \cdot {}^t y A z + \mu \cdot {}^t z A z) = 0$

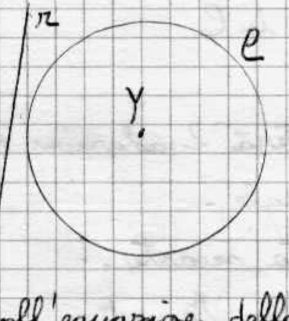
1ª soluzione: $\mu = 0$, $\forall\lambda$ però essendo $r)\ x = \lambda y + \mu z \Rightarrow$ questa soluzione ci dà il punto Y

2ª soluzione: $\mu_2 = 2\,{}^t y A z$, $\lambda_2 = -{}^t z A z$ $\Rightarrow$ questa soluzione dà nuovamente il punto Y se e solo se $\mu_2 = 0$, cioè ${}^t y A \cdot z = 0$

Se sostituiamo z con un generico punto $X \equiv [(x^1, x^2, x^3)]$ allora la retta tangente a $\mathcal{C}$ in Y è costituita da tutti i punti $X \in P_2$ / ${}^t y A x = 0$
Equazione della retta tangente a $\mathcal{C}$ nel punto Y. Tale retta è anche detta retta polare di Y rispetto a $\mathcal{C}$.
Se $Y \notin \mathcal{C}$ ${}^t y A x = 0$ è ancora l'equazione di una retta, e anche questa retta è detta retta polare di Y rispetto a $\mathcal{C}$



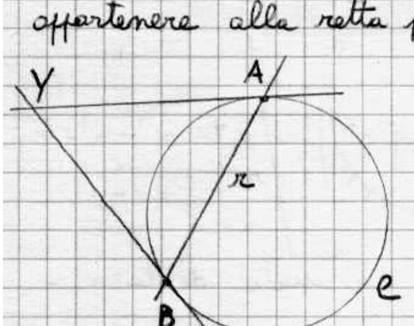
Se Y è esterno a $\mathcal{C}$ allora la sua retta polare è una retta che taglia la conica in 2 punti



Se Y è interno a $\mathcal{C}$ allora la sua retta polare è esterna.

<u>NB</u>= il punto Y si dice anche polo della sua retta polare

Dall'equazione della retta polare di un punto $Y \in P_2$
${}^t y A x = 0$ si ha che ${}^t x A y = 0$
allora se X è un punto che appartiene alla retta polare di Y allora anche Y deve appartenere alla retta polare di X, tale condizione è nota come <u>legge di reciprocità</u>



Se Y è esterno a $\mathcal{C}$, le rette condotte da Y a $\mathcal{C}$ sono le rette polari dei 2 punti di intersezione di $\mathcal{C}$ con la polare di Y

<u>ESEMPIO</u> data la conica $\mathcal{C})\ -x^2-y^2-4x+4y-4=0$ trovare:
① la retta polare di $P \equiv (1,3)$
② la retta tangente a $\mathcal{C}$ in $Q \equiv (0,2)$
③ la retta tangente a $\mathcal{C}$ condotta da $O \equiv (0,0)$
Consideriamo $\mathcal{C}$ in coordinate omogenee $x = \frac{x^1}{x^3}$ $y = \frac{x^2}{x^3}$

$\mathcal{C})\ (x^1)^2 - (x^2)^2 - 4x^1x^3 + 4x^2x^3 - 4(x^3)^2 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 4 \neq 0 \text{ non degenere}$$

① $P \equiv (1,3)$ $\quad P \equiv [(1,3,1)]$ $\quad {}^tP \cdot A \cdot x = 0$

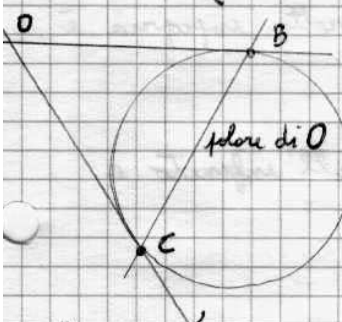
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -x^1 - x^2 = 0$$ polare di P in coordinate proiettive

Se divido per $x^3 \Rightarrow -x-y=0$ polare di P in coordinate cartesiane

② $Q \in \mathcal{C}$ $\quad -4+8-4=0$ la sua tangente è la retta polare ${}^tQ \cdot A \cdot x = 0$

$Q \equiv [(0,2,1)]$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x^1 = 0 \quad \text{cioè} \quad x = 0$$



③ trovare la polare di O

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -2x^1 + 2x^2 - 4x^3 = 0$$

$\mathcal{C} \cap$ con la polare di O

$$\begin{cases} (x^1)^2 - (x^2)^2 - 4x^1x^3 + 4x^2x^3 - 4(x^3)^2 = 0 \\ x^1 - x^2 + 2x^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow 4x^1x^3 = 0 \; \begin{cases} x^1 = 0, \forall x^3 & \text{ⓐ} \\ x^3 = 0, \forall x^1 & \text{ⓑ} \end{cases}$$

ⓐ $x^1 = 0$ scelgo $x^3 = 1$ sostituendo ottengo $x^2 = 2$ $\quad C \equiv [(0,2,1)]$

ⓑ $x^3 = 0$ scelgo $x^1 = 1$ sostituendo ottengo $x^2 = 1$ $\quad B \equiv [(1,1,0)]$

La polare di C sarà:

$$\Downarrow$$

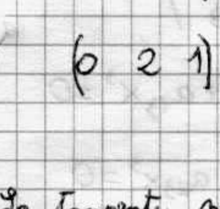
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x^1 = 0 \text{ cioè } x = 0$$

La polare di B sarà

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x^1 - x^2 = 0 \text{ cioè } x - y = 0$$

La tangente nel punto B è un asintoto, cioè il punto B è un punto di tangenza all'infinito



CLASSIFICAZIONE delle CONICHE NON DEGENERI

Sia $\mathcal{C}$ una conica non degenere

$$\mathcal{C})\; a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + a_{33}(x^3)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + 2a_{13}x^1x^3 + 2a_{23}x^2x^3 = 0 \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$\det(A) \neq 0$

Intersechiamo $\mathcal{C}$ con la retta impropria $x^3=0$

$$\begin{cases}\mathcal{C}\\ x^3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}(x^1)^2+a_{22}(x^2)^2+2a_{12}x^1x^2=0\\ x^3=0\end{cases}$$

Se dividiamo per $(x^2)^2$ otteniamo:

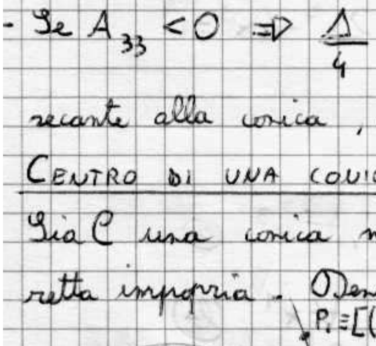
$$a_{11}\left(\frac{x^1}{x^2}\right)^2+2a_{12}\frac{x^1}{x^2}+a_{22}=0 \Rightarrow \frac{\Delta}{4}=(a_{12})^2-(a_{11}\cdot a_{22})=-A_{33}$$

A_{33} è il complemento algebrico di a_{33}, cioè $A_{33}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}$

- Se $\det(A_{33})=0 \Rightarrow \frac{\Delta}{4}=0$ ho solo 2 soluzioni, allora la retta impropria è tangente a $\mathcal{C}$ $\Rightarrow$ tale retta viene detta parabola
- Se $A_{33}>0 \Rightarrow \frac{\Delta}{4}<0 \Rightarrow$ non c'è nessuna soluzione, cioè la retta impropria è esterna alla conica $\Rightarrow \mathcal{C}$ è detta ellisse
- Se $A_{33}<0 \Rightarrow \frac{\Delta}{4}>0 \Rightarrow$ ho 2 soluzioni reali, cioè la retta all'infinito è secante alla conica, allora $\mathcal{C}$ è detta iperbole.

CENTRO DI UNA CONICA

Sia $\mathcal{C}$ una conica non degenere, si dice centro (di simmetria) di $\mathcal{C}$, il polo della retta impropria. Denotiamo con C il centro di $\mathcal{C}$



La retta polare di P_1 deve contenere C, poiché P_1 sta sulla polare di C. La stessa cosa vale per P_2 e per la sua polare

$$C\equiv[(c^1,c^2,c^3)] \qquad A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Polare di } P_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot A\cdot\begin{pmatrix}x^1\\x^2\\x^3\end{pmatrix}=0\\[2ex] \text{Polare di } P_2 \quad \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix} A\cdot\begin{pmatrix}x^1\\x^2\\x^3\end{pmatrix}=0\end{array}\right\} C \begin{cases}a_{11}x^1+a_{12}x^2+a_{13}x^3=0\\ a_{12}x^1+a_{22}x^2+a_{23}x^3=0\end{cases}$$

Per trovare C uso i minori del secondo ordine, cioè:

$$x^1=\det\begin{pmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}=c^1=A_{13} \qquad x^2=\det\begin{pmatrix}a_{13} & a_{11}\\ a_{23} & a_{12}\end{pmatrix}=c^2=A_{23}$$

$$x^3=\det\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}=c^3=A_{33} \Rightarrow C\equiv[(c^1,c^2,c^3)]=[(A_{13},A_{23},A_{33})]$$

Il centro di una parabola è sempre un punto improprio o all'infinito

Il centro di un ellisse o di un iperbole è un punto proprio

Ellisse e iperbole si dicono coniche a centro

ESEMPIO

$7x^2+7y^2-2xy-24x-24y=0$ classificarla e trovare il centro.

Sostituendo $x=\frac{x^1}{x^3}$ e $y=\frac{x^2}{x^3}$

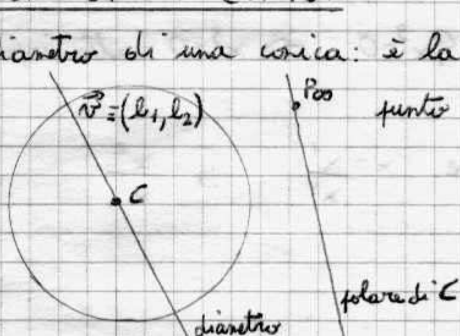
$7(x^1)^2+7(x^2)^2-24x^1x^2-24x^1x^3-24x^2x^3=0$ $\quad A=\begin{pmatrix}7 & -1 & -12\\ -1 & 7 & -12\\ -12 & -12 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A)\neq 0$

$A_{33}=48>0$ è un ellisse

Centro $C\equiv[(A_{13},A_{23},A_{33})]=[(2,2,1)]$ e coordinate cartesiane $(2,2)$

ASSI DI UNA CONICA

Diametro di una conica: è la retta polare di un qualunque punto all'infinito di un punto improprio - $P_\infty\equiv[(m,n,0)]$



l'equazione generica di un diametro è $(m,n,0)$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}m & n & 0\end{pmatrix}\cdot A\cdot\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\\ x^3\end{pmatrix}$$

Si dice asse di $\mathcal{C}$ ogni diametro che sia ortogonale alla direzione individuata dal suo polo $P_\infty\equiv[(m,n,0)]$ $\quad \vec{u}\equiv(m,n)$

Impongo che $\vec{v}\equiv(l_1,l_2)$ sia ortogonale a $\vec{u}\equiv(m,n)$

$(l_1,l_2)=(a_{12}m+a_{22}n,\ -(a_{11}m+a_{12}n))$

Impongo la condizione di ortogonalità

$a_{12}m^2+a_{22}mn-a_{11}mn-a_{12}n^2=0$ $\qquad a_{12}m^2+(a_{22}-a_{11})mn-a_{12}n^2=0$

Se $a_{12}=0$
$a_{22}-a_{11}=0$ $\Rightarrow$ $\mathcal{C})\ a_{11}(x^1)^2+a_{22}(x^2)^2+a_{33}(x^3)^2+2a_{13}x^1x^3+2a_{23}x^2x^3$

se divido per a_{11} ottengo $x^2+y^2+ax+by+c=0$ equazione della circonferenza

se divido per n^2

$$a_{12}\left(\frac{m}{n}\right)^2+(a_{22}-a_{11})\frac{m}{n}-a_{12}=0$$

$\Delta=(a_{11}-a_{22})^2+4(a_{12})^2=0$ $\qquad a_{11}=a_{12}$, $a_{12}=0$ $\Rightarrow$ ricadiamo nel caso della circonferenza

Diversamente se $\Delta>0\Rightarrow$ abbiamo 2 soluzioni, nel caso della parabola una delle 2 corrisponde alla retta impropria $x^3=0$

$\mathcal{C}$ = parabola, allora $A_{33} = a_{11}a_{22} - (a_{12})^2 = 0$

$a_{11}a_{22} = (a_{12})^2 \Rightarrow$ sostituendo nel $\Delta = (a_{11})^2 + (a_{22})^2 - 2a_{11}a_{22} + 4(a_{12})^2 =$
$= (a_{22})^2 + (a_{11})^2 - 2a_{11}a_{22} + 4a_{11}a_{22} = (a_{11}+a_{22})^2$

$$\frac{m}{n} = \frac{(a_{11}-a_{22}) \pm (a_{11}+a_{22})}{2a_{12}} = \begin{cases} ⓐ & \dfrac{a_{11}}{a_{12}} \\ ⓑ & \dfrac{a_{22}}{a_{12}} \Rightarrow m = -a_{22} \quad e \quad n = a_{12} \end{cases}$$

Considero la soluzione ⓑ e sostituendo m ed n nell'eq del diametro ottengo:
$$(a_{11}a_{22} + (a_{12})^2)x^1 + (\cancel{-a_{12}a_{22} + a_{12}a_{22}})x^2 + (-a_{22}a_{13} + a_{12}a_{23})x^3 = 0$$

$-A_{33}x^1 + \rho x^3 = 0 \Rightarrow$ essendo una parabola $A_{33} = 0 \Rightarrow \rho x^3 = 0 \Rightarrow x^3 = 0$ retta impropria

ESEMPIO:

$\mathcal{C})\ 7x^2 + 7y^2 - 2xy - 24x - 24y = 0$ in coordinate proiettive $x = \dfrac{x^1}{x^3}$ $y = \dfrac{x^2}{x^3}$

$7(x^1)^2 + 7(x^2)^2 - 2x^1x^2 - 24x^1x^3 - 24x^2x^3 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -12 \\ -1 & 7 & -12 \\ -12 & -12 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow \mathcal{C} \text{ non degenere} \quad A_{33} = 48 > 0 \Rightarrow \text{ellisse}$$

$C \equiv (A_{13}, A_{23}, A_{33}) = (96, 96, 48) \Rightarrow C \equiv (2,2)$ in coordinate cartesiane

ASSI $P_\infty \equiv [(m, n, 0)]$

$$(m \quad n \quad 0) \cdot A \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \underbrace{(7m - n)}_{a}x^1 + \underbrace{(-m + 7n)}_{b}x^2 + \underbrace{(12m - 12n)}_{c}x^3 = 0$$

$\vec{v} \equiv (-m + 7n, -7m + n)$ $\quad \underset{(m,n)}{\vec{u}} \cdot \vec{v} = 0$
$\vec{v} \equiv (b, -a)$

$-m^2 + \cancel{7mn} + n^2 - \cancel{7mn} = 0 \qquad n^2 - m^2 = 0 \qquad (n+m)(n-m) = 0$

$\Rightarrow$ ⓐ $n = m = 1$ ⓑ $n = -m$ $n = 1$ $m = -1$

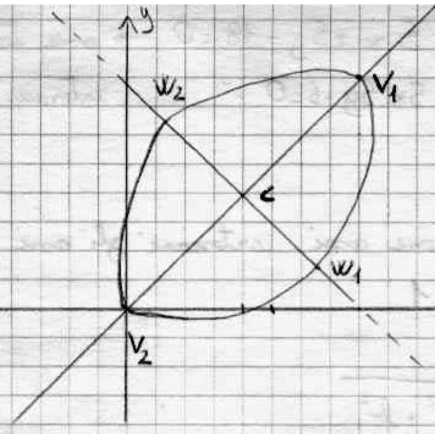
Sostituendo ⓐ nell'equazione ottengo $6x^1 + 6x^2 - 24x^3 = 0$ oppure $x + y - 4 = 0$ che è l'equazione del 1° asse

Se sostituisco ⓑ ottengo $8x^1 - 8x^2 = 0 \Rightarrow x - y = 0$ che è il 2° asse

Si dicono vertici della conica le intersezioni della conica con i suoi assi

$$\begin{cases} 7x^2 + 7y^2 - 24xy - 24x - 24y = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} W_1 \equiv (2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}) \\ W_2 \equiv (2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 7x^2 + 7y^2 - 24xy - 24x - 24y \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} V_1 \equiv (4,4) \\ V_2 \equiv (0,0) \end{matrix}$$



Un ellisse può essere vuoto e succede quando $\det(A) \cdot a_{11} > 0$, cioè se hanno lo stesso segno non hanno punti reali

ASINTOTI si dice asintoto di una conica non degenere ogni retta propria tangente alla conica in un suo punto improprio $\Rightarrow$ solo l'iperbole ammette asintoti

Gli asintoti di un iperbole sono le rette polari dei suoi 2 punti all'infinito o punti impropri. Siccome gli asintoti sono dei diametri, allora passano per il centro. Se gli asintoti sono tra loro ortogonali allora l'iperbole si dice EQUILATERA.

TEOREMA un'iperbole è equilatera se $a_{11} + a_{22} = 0$

ESERCIZIO

e) $5xy - 12x - 6y + 12 = 0$ in coordinate proiettive $5x^1x^2 - 12x^1x^3 - 6x^2x^3 + 12(x^3)^2 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{2} & -6 \\ \frac{5}{2} & 0 & -3 \\ -6 & -3 & 12 \end{pmatrix} \qquad \det(A) = 15 \neq 0 \Rightarrow \text{non degenere}$$

$A_{33} = -\frac{25}{4} < 0$ è un iperbole $\qquad a_{11} + a_{22} = 0 + 0 = 0$ è un'iperbole equilatera

$C \equiv (A_{13}, A_{23}, A_{33}) = \left(-\frac{15}{2}, -15, -\frac{25}{4}\right) \Rightarrow C \equiv \left(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right)$

ASINTOTI

$$\begin{cases} 5x^1x^2 - 12x^1x^3 - 6x^2x^3 + 12(x^3)^2 = 0 \\ x^3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x^1x^2 = 0 \\ // \end{cases} \quad \begin{cases} x^1 = 0, \ \forall x^2 \\ x^2 = 0, \ \forall x^1 \end{cases}$$

1° CASO $P_{1\infty} \equiv [(0,1,0)]$ $\qquad$ 2° CASO $P_{2\infty} \equiv [(1,0,0)]$

ora ne calcolo le polari che risultano essere gli asintoti

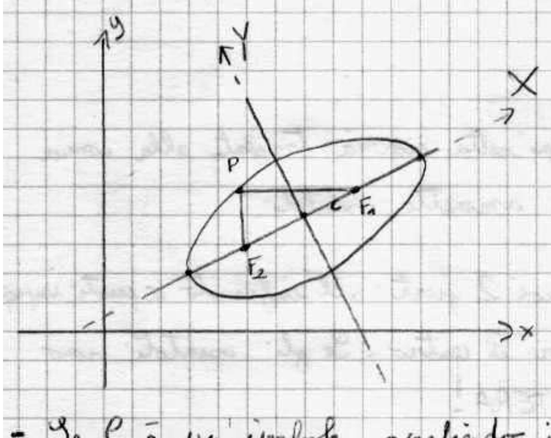
1° ASINTOTO $\quad (0 \ 1 \ 0) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{5}{2}x^1 - 3x^3 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{5}$

2° ASINTOTO $\quad (1 \ 0 \ 0) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow y = \frac{12}{5}$

Gli asintoti risultano essere le rette di equazione $5x + 5y - 18 = 0$ → asse trasverso, poiché
$5x - 5y + 6 = 0$ interseca l'iperbole

EQUAZIONI CANONICHE

- Se C è un'ellisse, scegliendo il riferimento che ha come assi cartesiani gli assi dell'ellisse allora l'equazione di C è del tipo $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$

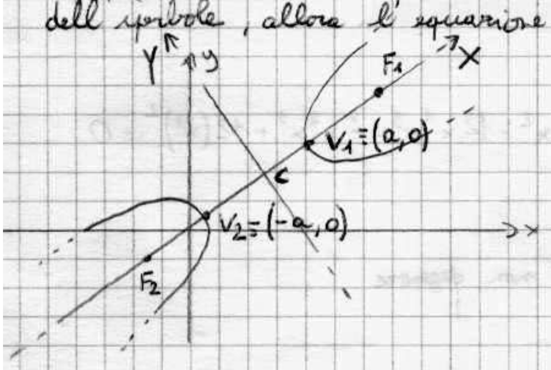


Se $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$F_1 \equiv (c, 0) \quad F_2 \equiv (-c, 0)$

L'ellisse è un luogo geometrico di punti del piano le cui distanze tra 2 punti fissati, detti fuochi, hanno somma costante

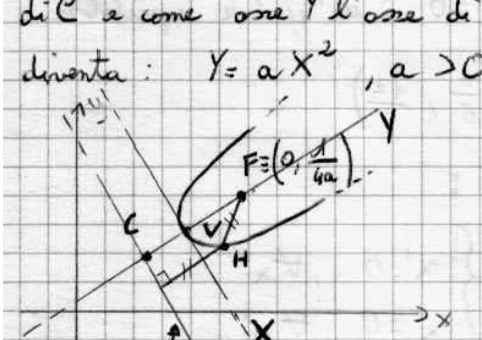
- Se C è un'iperbole, scegliendo il riferimento che ha come assi cartesiani, gli assi dell'iperbole, allora l'equazione di C diventa: $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$



$c = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad F_1 \equiv (c, 0) \qquad F_2 \equiv (-c, 0)$

L'iperbole è il luogo geometrico di punti del piano le cui distanze dai punti fissati F_1 e F_2 hanno differenza costante

- Se C è una parabola, scegliendo il riferimento che ha come asse X la tangente del vertice di C e come asse Y l'asse di simmetria di C, allora l'equazione generica della parabola diventa: $Y = aX^2$, $a > 0$



La parabola è il luogo geometrico di punti del piano che hanno la stessa distanza dal fuoco e dalla direttrice

ESEMPIO: $7x^2 + 7y^2 - 2xy - 24x - 24y = 0$ (continuo esempio precedente)

Trovare l'equazione canonica

1° METODO formula di trasformazione delle coordinate (già visto)

2° METODO metodo degli invarianti ortogonali

$\lambda_1 (x^1)^2 + \lambda_2 (x^2)^2 + \lambda_3 (x^3)^2 = 0$

$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 = 0 \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

Con un cambiamento di riferimento si ha:

$\det(A) = \det(B)$ $\quad A_{33} = B_{33}$ $\quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\quad \bar{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$\bar{A}$ e $\bar{B}$ hanno gli stessi autovalori

Nell'esempio, λ_1 e λ_2 sono gli autovalori della matrice assegnata $\Rightarrow$

$\det(A) = \det(B) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \Rightarrow \lambda_3 = \dfrac{\det(A)}{\lambda_1 \cdot \lambda_2}$

Calcolare gli autovalori di $\bar{A} = \begin{pmatrix} 7-\lambda & -1 \\ -1 & 7-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (7-\lambda)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 6 \\ \lambda_2 = 8 \Rightarrow \lambda_3 = -48 \end{cases}$

L'equazione canonica diventa: $6x^2 + 8y^2 - 48 = 0$

$$\frac{X^2}{8} + \frac{Y^2}{6} = 1$$