monia.ghirardi@libero.it lezione del 07/11/2001

DERIVATE E DERIVABILITÀ

Sia **f: A ® IR** con

A = Intervalli / Semirette / Unioni di insiemi del tipo precedente / Tutto IR

Preso $x_o \in A$ considero una quantità $h \in IR-\{0\}$ tale che $x_o + h \in A$

h è l'incremento
$\mathbf{x_o + h}$ è il punto d'incremento

Chiamo rapporto incrementale di f in x_o

$$\frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} \quad \text{ovvero} \quad \frac{\text{incremento variabile dipendente}}{\text{incremento variabile indipendente}}$$

f si dice derivabile nel punto x_o se

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} \in IR$$

Il valore del limite si chiama derivata della funzione f in x_o e si indica con:

$$f'(x_o) \quad ; \qquad Df(x_o) \quad ; \qquad \frac{df}{dx}(x_o)$$

Con il cambio di variabile in $x_o + h = x$ si ha la definizione equivalente:

$$\exists \lim_{x \to xo} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \in IR$$

f si dice variabile a destra (sinistra) in x_o se

$$\exists \lim_{h \to o+ \,[\,o-]} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} \in IR$$

tale valore si indica con:

$f'_+(x_o)$ o $f'_-(x_o)$; $f'_d(x_o)$ o $f'_s(x_o)$

F derivabili in $x_o \Leftrightarrow$ f derivabile a destra e a sinistra in x_o e $f'_+(x_o) = f'_-(x_o)$. A volte può esserci la proprietà, ma non l'uguaglianza.

Esempio

$F(x) = |x| \quad x_o = 0$

Cerco la derivabilità a destra:

$$\lim_{h\to o+} \frac{f(h) - f(0)}{h} =$$

$$\lim_{h\to o+} \frac{|\,h\,|}{h} \underset{\downarrow\, h > 0}{=}$$

$$\lim_{h\to o+} \frac{h}{h} = 1 = f'_{+}(0)$$

Cerco la derivabilità a sinistra:

$$\lim_{h\to o-} \frac{|\,h\,|}{h} \underset{\downarrow\, h < 0}{=}$$

$$\lim_{h\to o-} \frac{-h}{h} = -1 = f'_{-}(0)$$

f è derivabile a destra e a sinistra in x_o ma non derivabile poiché i risultati sono diversi.

Esempio

$$F(x) = \begin{cases} x \cdot \text{sen}\,\dfrac{1}{x} & \text{, se } x \neq 0 \\ 0 & \text{, se } x = 0 \end{cases}$$

derivabilità in $x_o = 0$?
Il rapporto incrementale di f in $x_o = 0$ è :

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} \quad \text{ovvero} \quad \frac{h \cdot \text{sen}\, 1/h - 0}{h} = \text{sen}\, 1/h$$

ora devo studiarne il limite

$\lim_{h\to 0}$ sen $1/h$ = non $\exists$

di conseguenza

non $\exists$ $\lim_{h\to 0+\ [\,0-]}$ sen $1/h$

TEOREMA

Se f è derivabile in x_o allora f è continua in x_o
Dimostrazione:
f è continua in $x_o \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f(x_o + h) = f(x_o) \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} [f(x_o + h) - f(x_o)] = 0$

ma considerando

$$f(x_o + h) - f(x_o) = \underset{\forall h \neq 0}{\underset{\downarrow}{}} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} \cdot h$$

Per il teorema sul prodotto dei limiti si ha la tesi poichè $f(x_o) \cdot 0 \to 0$

Osservazioni:

la derivabilità in $x_o \Rightarrow$ alla continuità in x_o. Ci sono funzioni continue in un punto, ma non derivabili nello stesso punto (vedi esempi precedenti). La continuità in x_o è C.N.S. per la derivabilità.

REGOLE DI DERIVAZIONE

1. Somma e prodotto

Se f e g sono derivabili in x_o allora:

$f + g$ è derivabili in x_o e $D(f+g)(x_o) = f'(x_o) + g'(x_o)$

$f \cdot g$ è derivabile in x_o e $D(f \cdot g)(x_o) = f'(x_o)\, g(x_o) + f(x_o)g'(x_o)$

Dimostrazione

Il rapporto incrementale di f+g è

$$\frac{[f(x_o + h)+g(x_o + h)] - [f(x_o)+ g(x_o)]}{h} = \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} \cdot \frac{g(x_o + h) - g(x_o)}{h}$$

per le ipotesi e il teorema della somma:

$\lim_{h\to 0} f'(x_o) + g'(x_o)$

Il rapporto incrementale di f·g è

$$\frac{[f(x_o + h)+g(x_o + h)] - [f(x_o)\cdot g(x_o)]}{h} = \frac{f(x_o + h)g(x_o + h) - f(x_o)g(x_o + h) + f(x_o)g(x_o + h) - [f(x_o)\cdot g(x_o)]}{h}$$

$$g(x_o + h)\frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} + f(x_o)\frac{g(x_o + h) - g(x_o)}{h}$$

Per le ipotesi, per i teoremi su somma e prodotto e poiché la derivabilità implica la continuità abbiamo:

$f'(x_o)g(x_o) + f(x_o)g'(x_o)$

2. Se f è derivabile in x_o e $f(x_o) \neq 0$ allora 1/f è derivabile in x_o e la sua derivata è

$$D(1/f)(x_o) = \frac{-f'(x_o)}{f^2(x_o)}$$

Dimostrazione

Il rapporto incrementale di 1/f in x_o è

$$\frac{\dfrac{1}{f(x_o + h)} - \dfrac{1}{f(x_o)}}{h} = \frac{\dfrac{f(x_o) - f(x_o + h)}{f(x_o + h)\, f(x_o)}}{h} = -\frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} \cdot \frac{1}{f(x_o + h)\, f(x_o)}$$

$$\xrightarrow{h \to 0} \quad \frac{f'(x_o)}{f^2(x_o)}$$