

1) Rappresentare nel piano xy i campi di esistenza delle seguenti funzioni:

$$(a) \sqrt{xy-x} \quad (b) \log(x^3+y^3) \quad (c) \sqrt{x^2+y^2-y} \quad (d) \log(x^2+xy+y^2)$$

2) Studiare i limiti delle seguenti funzioni al tendere di (x, y) a $(0, 0)$:

$$(a) \frac{x}{x^2+y^2}, \quad (b) \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (c) \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$(d) \frac{y \log^2(1+x)}{x^2+y^2} \quad (e) \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^4}},$$

3) Si considerino le funzioni nulle nell'origine che nei punti $(x, y) \neq (0, 0)$ sono definite dalle seguenti leggi, e se ne studi la differenziabilità nell'origine.

$$(a) \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (b) \frac{1-\cos xy}{x^2+y^2}, \quad (c) \sqrt{x^2+y^2} \sin y,$$

$$(d) \sqrt{x^4+y^4}, \quad (e) \sqrt{1-e^{xy}}$$

4) Scrivere l'equazione del piano tangente nel punto $(1, 1, 2)$ al grafico della funzione $z = \sqrt{x^2+3y^2}$.

5) Determinare i punti di estremo locale delle seguenti funzioni:

$$(a) xy + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}y^3, \quad (b) x^2y^3, \quad (c) \frac{1}{2}x + y - x^2y^2$$

$$(d) x^2y - 2xy^2, \quad (e) \log(x+2y) - \frac{1}{4}xy,$$

6) Stabilire se l'origine è un punto di estremo locale per le seguenti funzioni:

$$(a) y\sqrt{x^2+y^2}, \quad (b) \sqrt{x^2+y^2} \cos x,$$

$$(c) x^4 + y^4 - 3xy^3, \quad (d) y^2 + x^2y + x^4,$$

7) Determinare i valori di estremo assoluto delle seguenti funzioni sugli insiemi a fianco indicati:

$$(a) f(x, y) = x + 2y \cos x, \quad E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x\}.$$

$$(b) f(x, y) = 2x + y - xy, \quad E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0, xy \geq 1, 2x + 2y \leq 5\}.$$

$$(c) f(x, y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2 - xy - x, \quad \text{triangolo di vertici } (0, 0), (0, 2), (2, 0).$$

$$(d) f(x, y) = x + \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2), \quad E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x + y \geq 1\}.$$

$$(e) f(x, y) = x^2y - x \log y, \quad E = [0, 1] \times [1, 2]$$