

1) Mediante confronto con la serie armonica generalizzata, studiare il carattere delle seguenti serie:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-4}{n^2} \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\sqrt{n+1}}{n^3+2} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \sin \frac{1}{n^2}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2\sqrt{1+n^2}} \quad (e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + \log n}{n\sqrt{2n^2-1}} \quad (f) \sum_{n=1}^{\infty} \log^2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

2) Mediante il criterio del rapporto, studiare il carattere delle seguenti serie:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n4^n}{e^{2n}} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! 2^n}{(2n)!} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\sqrt{(2n-1)!}} \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} \binom{2n}{n}$$

3) Studiare convergenza assoluta e semplice delle seguenti serie:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \sqrt{1+n^2} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{1+3n^2} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n} - \frac{4}{n^2}\right)$$

4) Studiare il carattere delle seguenti serie:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1+\sqrt{n})^5} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n + 1}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{2 + n!} \quad (e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n + 3^n} \quad (f) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \log n}$$

$$(g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n-1}}{n} \sin \frac{1}{n} \quad (h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4 + \sqrt{n!}} \quad (i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{1 + e^{2n}}$$

$$(j) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log n} \quad (k) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) \quad (l) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\log n}$$

$$(m) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n + \sqrt{2n}} \quad (n) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \log \frac{n}{n+1} \quad (o) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{e^{2n}+1}}{3^n}$$

$$(p) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{4}{n^2} - \frac{1}{n^3}} \quad (q) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1+n^2}}{n^3+2} \quad (r) \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \sqrt[n]{e})$$

$$(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} \quad (t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{2^n + 4^n} \quad (u) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \cos n}{\sqrt{1+n^4}}$$

$$(v) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! + 1}{(n+1)!} \quad (w) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \log n}{1+n^3} \quad (x) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{n\pi}{4n+1}\right)^{n-1}$$

5) Stabilire se le seguenti serie di funzioni convergono totalmente negli insiemi indicati: (a) $]-\infty, -1]$, $[-1, 0[$; (b) $[1, +\infty[$, $[0, 1]$; (c)-(d) $[0, +\infty[$; (e) $[0, 1[$, $[1, +\infty[$; (f) $[-a, a]$ ($a > 0$), \mathbf{R} ; (g)-(h)-(i) $[0, 1]$, $[1, +\infty[$;

$$\begin{aligned} & (a) \sum_{n=0}^{\infty} e^{nx} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n\sqrt{n+x}} \\ & (d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{nx}}{1+n^2\sqrt{x}} \quad (e) \sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx} \quad (f) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sin \frac{x}{n}\right)^2 \\ & (g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{nx^2+n^3} \quad (h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+nx)^2} \quad (i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \log \frac{n+1}{n+x} \end{aligned}$$

6) Provare, mediante integrazione per serie, che

$$(a) \int_1^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^{-2} e^{-2n/x} \right) dx = \frac{1}{2} \frac{e}{e^2 - 1}, \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sin x)^{2n} dx = 2$$

7) Determinare l'insieme di convergenza delle seguenti serie di potenze.

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{2n+1} \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{1+2^n}} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} x^n \log n \quad (d) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n$$

8) Determinare, fino all'ordine indicato tra parentesi, le formule di McLaurin delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} & (a) e^{\sqrt{1+x}} \quad (\text{ord. } 2) \quad (b) \log \cos x \quad (\text{ord. } 3) \\ & (c) \sin^2 x \quad (\text{ord. } 3) \quad (d) \cos(x^2) \quad (\text{ord. } 8). \end{aligned}$$

9) Determinare gli sviluppi in serie di McLaurin delle seguenti funzioni, precisando il relativo campo di sviluppabilità:

$$\begin{aligned} & (a) xe^x, \quad (b) \sin(2x), \quad (c) \log(1-x), \\ & (d) \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad (e) \log(1+x^2). \end{aligned}$$

10) Calcolare la derivata di ordine 18 nell'origine della funzione $f(x) = \sin(x^2)$.

11) Utilizzando le formule di Taylor, calcolare i seguenti limiti:

$$\begin{array}{ll} (a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + e^{-x} - e^x}{x^3}, & (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{-x/2} - \log(1+x)}{x - \sin x}, \\ (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin(x^2)}{x^5}, & (d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos x - \log(1+x^2)}{x^6}, \\ (e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{1+x} + \log(1-x)}{x \sin^2 x}, & (f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos(x/\sqrt{3}) - \sin x}{x^5}. \end{array}$$

12) Determinare lo sviluppo in serie di McLaurin della funzione

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

nei seguenti due modi: (a) utilizzando la formula della serie geometrica; (b) derivando per serie lo sviluppo in 9e.

13) Determinare il raggio di convergenza e calcolare la somma delle seguenti serie di potenze:

$$(a) \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)x^n, \quad (b) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n+2} x^n.$$

14) Determinare le serie di Fourier associate alle seguenti funzioni

$$(a) \operatorname{sgn} x, \quad (b) x^2, \quad (c) \max(0, x),$$

dove $\operatorname{sgn} x$ (segno di x) vale $-1, 0, 1$ a seconda che $x < 0$, $x = 0$, $x > 0$; stabilire se esse convergono alle corrispondenti funzioni periodiche regolarizzate.

15) Calcolare

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

sfruttando rispettivamente l'uguaglianza di Parseval in 14a e la convergenza, nel punto $x = 0$, della serie di Fourier di 14b.