Università di MODENA - C.d.L. ING. INFORMATICA - a.a. 2001/2002

ESERCIZI DI GEOMETRIA A
(aggiornamento 10/06/2002)

Esercizio 1. Tra le seguenti matrici, eseguire tutti i possibili prodotti:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, calcolare $A \cdot A - {}^tA + I_3$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. Per ognuna delle seguenti matrici, si calcoli il determinante e, se possibile, la matrice inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4. Calcolare il determinante di:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 11 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \\ -2 & 5 & 12 & -29 \end{pmatrix}$$

$$C_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2\alpha & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & -7 \\ -1 & 1 & -1 & \alpha \end{pmatrix} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Esercizio 5. Dire quali tra i seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali, e - in caso affermativo - trovarne una base:

$$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x + y = 0\}$$

$$U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x + y = 3\}$$

$$U_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x = y + 1\}$$

$$U_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + y - z = 0, \ t = 3x\}$$

$$U_5 = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ detA = 0\}$$

$$U_6 = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ a = 0\}$$

Esercizio 6. Dire se i seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sono linearmente dipendenti o indipendenti:

$$W_1 = \{(1, 2, 3), (4, -1, 5), (-3, 3, -2), (6, 3, 11)\}$$

$$W_2 = \{(1, 2, 3), (4, -1, 5), (-3, 3, -2)\}$$

$$W_3 = \{(1, 2, 3), (4, -1, 5)\}$$

$$W_4 = \{(1, 1, 0), (-5, 1, 1), (6, 0, 1)\}$$

$$W_5 = \{(1, 1, 0), (-5, -3, 1), (6, 0, -3)\}$$

Esercizio 7. Dire se i seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2[t]$ sono linearmente dipendenti o indipendenti:

$$H_1 = \{1 + t + 2t^2, 1 + t^2, 3 - t + 2t^2\}$$

$$H_2 = \{-3 + t + 2t^2, 1 - 3t^2, 3 - t + 2t^2\}$$

Esercizio 8. Dire se il seguente sottoinsieme dello spazio vettoriale $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ è linearmente dipendente o indipendente:

$$M = \{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}\}$$

Esercizio 9. Determinare la dimensione ed una base per ciascuno dei seguenti sottospazi vettoriali:

$$U = L((1, 0, 1), (2, 1, 1), (-6, -2, -4)) \subset \mathbb{R}^3$$

$$U' = L((1, 2, 3), (4, -1, 5), (-3, 3, -2), (6, 3, 11)) \subset \mathbb{R}^3$$

$$W_h = L((3,0,1,1),(1,1,0,1),(2h,h+2,h,h+1)) \subset \mathbb{R}^4, \quad (h \in \mathbb{R})$$

Completare poi la base di ciascun sottospazio ad una base dello spazio vettoriale ambiente.

Esercizio 10. Estrarre una base $\mathcal{B}$ dal seguente sistema di generatori per $\mathbb{R}^3$:

$$H = \{(1,2,3),(4,-1,5),(-3,3,-2),(6,3,11),(0,1,1)\}$$

Determinare poi le componenti dei vettori $\mathbf{u} = (7,3,12)$ e $\mathbf{v} = (11,-3,14)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$; determinare infine il vettore $\mathbf{w} \equiv_{\mathcal{B}} (-1,1,5)$

Esercizio 11. Determinare la dimensione ed una base per la somma e per l'intersezione dei seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x-y, \ x+y-z=0\}$$

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+6y-2z=0\}$$

Si dica inoltre se U e W sono sottospazi vettoriali complementari in $\mathbb{R}^3$ oppure no.

Esercizio 12. Determinare la dimensione (ed una base) per la somma e per l'intersezione dei seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:

$$U = L((1,0,1,0),(1,1,1,0)) \quad W = L((2,1,-1,0),(0,1,1,1),(0,0,0,1))$$

Esercizio 13. Stabilire quali tra le seguenti applicazioni sono trasformazioni lineari e per esse determinare la dimensione ed una base del nucleo e dell'immagine:

$$\begin{aligned}
&f_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad f_1(x,y,z,t) = (x-y, y+z, t) \\
&g_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad g_1(x,y,z) = (x+3y, y-4z-x) \\
&h \ = \ g_1 \circ f_1 \\
&f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad f_2(x,y) = (x+y, y, x) \\
&f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, \quad f_3(x,y) = (3x, x, 2x, 0) \\
&f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f_4(x,y,z) = (x+3, y) \\
&f_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f_5(x,y,z) = (2x+y, z, x-y)
\end{aligned}$$

Esercizio 14. Date le seguenti trasformazioni lineari, determinare, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, la dimensione del nucleo e dell'immagine:

$$\begin{aligned}
&f_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad f_\lambda(x,y,z) = (x-y+(1-\lambda)z, \lambda x+2y+\lambda z, 2x, \lambda y+2z) \\
&g_\lambda : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad g_\lambda(x,y,z,t) = (\lambda x, y-t, 2x+\lambda z)
\end{aligned}$$

Esercizio 15. Determinare, se esiste, la trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$T((1,0,1,0)) = (2,1,3) \quad T((0,-1,0,0)) = (0,-1,1)$$

$$T((2,0,0,-2)) = (4,0,4) \quad T((0,3,1,-1)) = (0,4,-4)$$

Esercizio 16. Determinare, se esiste, la trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ avente nucleo $Ker\, T = L((1,2,3),(0,-1,1))$ e tale che $T((0,0,1)) = (-1,0,2,0)$ Trovare la immagine in T del vettore $\mathbf{v} = (1,1,1)$.

Esercizio 17. Determinare la matrice associata alla trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da $T(x,y,z,t) = (2x, y+z, t-y+3x)$ rispetto alle basi

$$\mathcal{B} = ((1,0,1,0),(0,-1,0,0),(2,0,0,-2),(0,3,1,-1))\ di\ \mathbb{R}^4\ e$$

$$\mathcal{B}' = ((1,0,0),(0,-1,0),(1,0,1))\ di\ \mathbb{R}^3$$

Esercizio 18. Determinare la trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che ha come matrice associata rispetto alla base

$$\mathcal{B} = ((1,0,0),(0,-1,0),(1,0,1))$$

la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Determinare anche l'immagine del vettore $\mathbf{v} = (2,0,1)$.

Esercizio 19. Calcolare il rango delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -4 & 6 & 1 \\ 5 & -5 & 9 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & 6 & 1 & -1 \\ 5 & -5 & 9 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & -2 & 11 \end{pmatrix}$$

Esercizio 20. Calcolare, al variare del parametro reale k, il rango delle seguenti matrici:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 4 & k \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B_k = \begin{pmatrix} 2-k & 3 & 8 \\ 2 & 4+k & 14 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & k & 2 \end{pmatrix} \qquad D_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & k & 2 & k \end{pmatrix}$$

$$E_k = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 1 & -k & 0 \\ 0 & 1 & -k \end{pmatrix} \qquad F_k = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 & 0 \\ 1 & -k & 0 & k+1 \\ 0 & 1 & -k & k-1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 21. Discutere e - se possibile - risolvere i seguenti sistemi lineari:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z - t = 1 \\ x + y - z - 2t = 2 \\ x - 4y + 6z + t = -1 \\ 5x - 5y + 9z - 4t = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 4y - 3z = 6 \\ 2x - y + 3z = 3 \\ 3x + 5y - 2z = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 4y - 3z + 6t = 0 \\ 2x - y + 3z + 3t = 0 \\ 3x + 5y - 2z + 11t = 0 \end{cases}$$

Esercizio 20. Discutere e - nei casi possibili - risolvere i seguenti sistemi lineari, al variare del parametro reale k:

$$\begin{cases} (2-k)x + 3y + 8z = 8 \\ 2x + (4+k)y + 14z = 1 \\ -x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} kx + y + 3z = 3 \\ x - z = -2 \\ 2x + ky + 2z = k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 5y + 6z = 0 \\ x - ky = k + 1 \\ y - kz = k - 1 \end{cases}$$

Esercizio 21. É data la trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$T((x, y)) = (x - y, -x + 3y).$$

Attraverso la similitudine di matrici, determinare la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B} = ((1, 2), (2, -2))$ di $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 22. É data la trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^2[t] \to \mathbb{R}^2[t]$ che al generico polinomio $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ associa

$$T(p(t)) = (a_0 + a_1) - a_1 t - a_2 t^2.$$

Attraverso la similitudine di matrici, determinare la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B} = (2 + t, t + t^2, t - t^2)$ di $\mathbb{R}^2[t]$.

Esercizio 23. Si dica se esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sia associata rispetto a $\mathcal{B}$ all'endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$T((x, y, z)) = (2x - y, y + z, z).$$

Esercizio 24. Si dica se esiste una base $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sia associata rispetto a $\mathcal{B}'$ all'endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$T((x, y, z)) = (2x - y, y + z, z).$$

Esercizio 25. Determinare autovalori, autovettori e autospazi dell'endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$T((x, y, z)) = (3x + y + z, -3x + 6y + z, 2x - y + 4z).$$

Esercizio 26. Si studi la diagonalizzabilitá per similitudine delle seguenti matrici di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -3 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 27. Determinare, se esiste, la trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avente nucleo $Ker\, T: \ x - z = 0$ e tale che $\mathbf{v} \equiv (1, 0, 0)$ sia autovettore relativo all'autovalore 3. Si dica anche se T ammette una matrice associata di tipo diagonale e, in caso affermativo, la si determini.

Esercizio 28. Si studi la diagonalizzabilitá per similitudine delle seguenti matrici a coefficienti reali, al variare del valore dei rispettivi parametri reali:

$$A_h = \begin{pmatrix} 2h & 2 & h \\ 0 & h-1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ k & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 29. Si determinino, se esistono, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tali che la matrice

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & \beta \\ 5 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$$

risulti simile alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 30. Fissato in $\mathbb{R}^3$ il prodotto scalare standard, determinare la dimensione, una base e una rappresentazione cartesiana per i complementi ortogonali ${}^{\perp}U$ e ${}^{\perp}U'$, ove

$$U = L((3,1,2),(5,0,-1)) \qquad U' = L((1,2,3))$$

Esercizio 31. Fissato in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard, si calcolino le norme dei due vettori $\mathbf{v} = (1,3,4,0)$ e $\mathbf{w} = (6,0,2,3)$ e si dica se tali vettori sono o non sono tra loro ortogonali. Si determinino poi la dimensione, una base e una rappresentazione cartesiana per il complemento ortogonale ${}^{\perp}W$, ove $W = L(\mathbf{v}, \mathbf{w})$.

Esercizio 32. Fissato in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard, si costruisca una base ortonormale per il sottospazio

$$H = L((1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,2,3,4)).$$

Si estenda poi tale base ad una base ortonormale per $\mathbb{R}^4$.
Si determinino infine una rappresentazione cartesiana sia per H che per ${}^{\perp}H$.

Esercizio 33. Fissato in $\mathbb{R}^3$ il prodotto scalare (non standard) definito da

$$\prec (x^1,x^2,x^3),(y^1,y^2,y^3) \succ = x^1y^1 + 2x^2y^2 - x^1y^2 - x^2y^1 + x^3y^3$$

si costruisca una base ortonormale (rispetto a $\prec \cdot,\cdot \succ$) per il sottospazio

$$W = L((1,1,1),(1,0,1),(3,2,3))$$

Si estenda poi tale base ad una base ortonormale (rispetto a $\prec \cdot,\cdot \succ$) per $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 34. Fissato in $\mathbb{R}^3$ il prodotto scalare standard, determinare i prodotti vettoriali $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ e $\mathbf{w} \wedge \mathbf{u}$ e il prodotto misto $< \mathbf{u}, \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} >$, dove

$$\mathbf{u} = (3,1,2), \qquad \mathbf{v} = (5,0,-1) \qquad \mathbf{w} = (1,2,3)$$