1. Algebre di Boole

♦ **Definizione 1.1.** Si dice *algebra di Boole* una struttura algebrica $(A, \cup, \cap)$, dove A è un insieme e $\cup, \cap$ sono due operazioni binarie interne su A (dette rispettivamente *disgiunzione* (o OR) e *congiunzione* (o AND) che godono delle seguenti proprietà:

(i) $\cup$ e $\cap$ sono commutative;

(ii) esistono in A un elemento neutro rispetto a $\cup$ (indicato con 0) ed un elemento neutro rispetto a $\cap$ (indicato con 1);

(iii) ciascuna delle due operazioni è distributiva rispetto all'altra, cioè per ogni $a, b, c \in A$, risulta

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$$
$$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$$

(iv) Per ogni $a \in A$ esiste $a' \in A$ (detto *complemento di* a) tale che

$$a \cup a' = 1 \quad \text{e} \quad a \cap a' = 0.$$

Si noti che, per ogni insieme non vuoto X, indicando con 0 l'insieme $\emptyset$ e con 1 l'insieme X stesso, e considerando le operazioni $\cup$ e $\cap$ come l'usuale unione e intersezione insiemistica, allora la terna $(\mathfrak{P}(X), \cup, \cap)$ risulta una algebra di Boole (avente come sostegno l'insieme delle parti di X)[1].

---

[1] In realtá, si dimostra che ogni algebra di Boole finita $(A, \cup, \cap)$ é isomorfa all'algebra di Boole dei sottoinsiemi di un insieme X; da questo segue che la cardinalitá di A é esattamente 2^n, dove n é la cardinalitá di X.

■ **Proposizione 1.1. (Principio di dualità)** *Ogni proposizione che deriva dagli assiomi (i), (ii), (iii), (iv) delle algebre di Boole rimane valida scambiando ovunque tra di loro i simboli delle operazioni* $\cup$ *e* $\cap$ *e gli elementi neutri* 1 *e* 0*.*

■ **Proposizione 1.2.** *Se* $(A, \cup, \cap)$ *é una algebra di Boole, allora:*

- $\forall a \in A, \quad a \cup a = a \quad e \quad a \cap a = a$
- $\forall a \in A, \quad a \cup 1 = 1 \quad e \quad a \cap 0 = 0$
- $\forall a, b \in A, \quad a \cup (a \cap b) = a \quad e \quad a \cap (a \cup b) = a$

⧫ **Definizione 1.2.** Sia $(A, \cup, \cap)$ una algebra di Boole. Si dice *funzione booleana* ogni espressione ottenuta combinando mediante $\cup$ e $\cap$ un numero finito di elementi di A. Il *numero di variabili* di una funzione booleana é il numero di simboli distinti che compaiono in essa, supponendo di identificare ogni elemento con il suo complemento.